PRÉSENTATION DES TRAVAUX ET PROJET DE RECHERCHE

MARTIN MION-MOUTON

1. Introduction

Mon travail de recherche se situe à l'intersection de la géométrie différentielle et des systèmes dynamiques, et je m'intéresse d'une manière générale aux questions faisant interagir les objets et méthodes provenant de ces deux domaines.

Un premier aspect de mes travaux concerne les systèmes dynamiques différentiables hyperboliques ou partiellement hyperboliques, et l'étude de leur rigidité dans le cas où les distributions invariantes sont de forte régularité. Dans la lignée de travaux passés analogues concernant les flots d'Anosov [Ghy87, BFL92], j'ai obtenu à ce sujet dans [MM21b] un résultat de classification à conjugaison $\mathcal{C}^\infty$ près des *difféomorphismes partiellement hyperboliques* de dimension trois sans point errant, dont les fibrés invariants sont lisses et dont la somme des directions stable et instable est de contact (énoncé qui sera précisé plus bas au théorème A). Ce travail repose sur l'étude d'une structure géométrique dite *rigide* préservée par ces difféomorphismes, appelée *géométrie de chemins*, et nécessite des outils différents de ceux disponibles dans le cas des flots, qui sont ici fournis par la notion de *géométrie de Cartan* (ces différentes notions géométriques seront introduites au paragraphe 2.3). Dans [FMMV21], nous adoptons avec Elisha Falbel et Jose Miguel Veloso le même type de méthodes pour obtenir un résultat de rigidité concernant les géométries de chemins *strictes* dont le groupe d'automorphismes est non-compact et admet une orbite dense (voir théorème C).

La première partie de mon projet de recherche consiste à poursuivre l'utilisation de ces méthodes pour traiter de nouvelles questions de rigidité concernant les difféomorphismes partiellement hyperboliques dont les distributions invariantes sont lisses. D'une part en dimension trois dans la direction d'une classification générale de tels difféomorphismes (sans hypothèse de contact) ; ce projet à moyen terme est présenté au paragraphe 3.1. D'autre part en dimension supérieure, dans un projet en cours avec Elisha Falbel, présenté au paragraphe 3.2.

Je m'intéresse par ailleurs au problème « dual », consistant, d'un point de vue tout à fait général mis en avant dans [GD91], à décrire les structures géométriques (rigides) d'un type donné dont le groupe d'automorphismes manifeste une dynamique « assez riche » – ce qui peut se résumer en première approche par la coexistence de la compacité de la variété considérée, et de la non-compacité du groupe d'automorphismes (pour la topologie compacte-ouverte sur $\mathrm{Diff}(M)$). Un tel projet exige tout d'abord la recherche d'un grand nombre d'exemples afin de valider ou infirmer l'idée que ces exemples sont classifiables, ce qui m'a amené dans le cadre des géométries de chemins de dimension trois à étudier la structure préservée par le flot géodésique d'une surface hyperbolique complète mais non-compacte. Je construis dans [MM21a] une compactification de telles structures et j'y étudie la dynamique du flot géodésique compactifié (un énoncé précis sera présenté au théorème D).

La seconde partie de mon projet de recherche consiste d'une part à poursuivre l'utilisation de ces techniques pour construire de nouvelles géométries de chemins dites *Kleiniennes* (c'est à dire des quotients de l'espace des drapeaux), en particulier sur des trois-variétés hyperboliques fermées en collaboration avec Elisha Falbel ; et d'autre part à étudier les propriétés de minimalité des compactifications. Ces deux projets à moyen terme sont décrits au paragraphe 3.3.

Date: 30 août 2022.

La dernière partie de mon projet de recherche concerne les flots en dimension trois à travers deux projets en court. Les *structures bi-contact* sont connues depuis [Mit95, ET98] pour caractériser les flots projectivement Anosov. Dans un projet en collaboration avec Federico Salmoiraghi que je présenterai au paragraphe 3.4, nous essayons de comprendre si une structure géométrique du même type pourrait caractériser les flots d'Anosov eux-même en dimension trois. Enfin, je présenterai au paragraphe 3.5 un projet en collaboration avec Tali Pinsky concernant une caractérisation topologique des flots de dimension trois conservatifs à équivalence orbitale près.

2. Présentation des travaux

2.1. **Flots d'Anosov de contact.** Dans le cas des flots d'Anosov, la rigidité imposée par la régularité des distributions invariantes est bien comprise, à la suite de travaux que je décris dans ce paragraphe.

2.1.1. *Flots d'Anosov.* Rappelons qu'un flot non-singulier (φ^t) de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété fermée M est dit *d'Anosov* si sa différentielle préserve un scindement $\mathrm{T}M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ du fibré tangent, où E^c est la direction du flot et E^s et E^u deux distributions non-nulles vérifiant les hypothèses suivantes (par rapport à une métrique Riemannienne quelconque sur M) :

(1) la *distribution stable* E^s est *uniformément contractée* par (φ^t), *i.e.* il existe deux constantes $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in M$:

$$\left\| \mathrm{D}_x \varphi^t|_{E^s} \right\| \leq C \lambda^t; \tag{2.1}$$

(2) la *distribution instable* E^u est *uniformément dilatée* par (φ^t), *i.e.* uniformément contractée par (φ^{-t}).

Les exemples les plus simples de flots d'Anosov sont fournis d'une part par la suspension d'un automorphisme *hyperbolique* du tore $\mathbf{T}^2$ (c'est à dire du difféomorphisme d'Anosov induit par une matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ sans valeur propre de module 1), et d'autre part par le flot géodésique d'une surface hyperbolique fermée. Ces exemples peuvent être décrits comme des groupes à un paramètre agissant sur des quotients compacts de groupes de Lie, et sont pour cette raison appelés *flots d'Anosov algébriques*. Ces derniers constituaient les seuls exemples connus de flots d'Anosov modulo conjugaison topologique jusqu'aux exemples non-transitifs de Franks et Williams dans [FW80], mais il existe désormais une grande variété de flots d'Anosov construits par chirurgie.

2.1.2. *Rigidité des flots d'Anosov de contact.* Les distributions stable et instable des flots d'Anosov algébriques vérifient cependant une propriétés qui les rendent exceptionnels parmi les flots d'Anosov : E^s et E^u sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors qu'elles ne sont en général que Hölder continues. Leur somme est par ailleurs une distribution de contact dans le cas des flots géodésiques, on parlera dans ce cas d'un *flot d'Anosov de contact*. Rappelons qu'une distribution d'hyperplans sur une variété de dimension impaire $2n+1$ est dite *de contact* lorsqu'elle est localement le noyau d'une *forme de contact* θ, c'est à dire d'une 1-forme pour laquelle $\theta \wedge (d\theta)^n$ ne s'annule pas (ce qui signifie géométriquement que la distribution n'est intégrable sur aucun ouvert non-vide). Le résultat suivant de Ghys nous dit que nous avons décrit tous les exemples vérifiant une telle régularité.

Théorème 2.1 ([Ghy87])**.** *Soit (φ^t) un flot d'Anosov de dimension trois dont les distributions stable et instable sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors à revêtement fini près, (φ^t) est soit $\mathcal{C}^\infty$-orbitalement équivalent*[1] *au flot géodésique d'une surface hyperbolique fermée, soit $\mathcal{C}^\infty$-conjugué à la suspension d'un automorphisme hyperbolique du tore.*

Plus précisément, Ghys montre que tout flot d'Anosov de contact à distributions lisses est conjugué à un exemple algébrique (fourni par l'action à droite du sous-groupe diagonal A sur un quotient compact de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ par un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times A$). Dans la suite de ce texte, nous appellerons *flots d'Anosov de contact algébriques* de dimension trois ces exemples.

1. Une orbite-équivalence est un difféomorphisme envoyant les orbites du premier flot sur celles du second (mais autorisant un changement de paramétrage du flot le long des orbites).

Ce résultat de Ghys a été généralisé en dimension supérieure par Benoist, Foulon et Labourie en 1992 dans [BFL92] dans le cas où le champ $E^s \oplus E^u$ est de contact : tout flot d'Anosov de contact dont les distributions stable et instable sont lisses est, à revêtement fini près, $\mathcal{C}^\infty$-orbitalement équivalent au flot géodésique d'une variété Riemannienne localement symétrique à courbure strictement négative.

2.2. **Difféomorphismes partiellement hyperboliques de type contact.** Les résultats de [Ghy87] et [BFL92] sont paradigmatiques de la rigidité dynamique qui peut être déduite d'hypothèses géométriques *dans le cas des flots*. Une question naturelle est alors de comprendre si la même rigidité subsiste pour des systèmes dynamiques à *temps discret*, c'est à dire en remplaçant le flot par un difféomorphisme vérifiant des propriétés dynamiques similaires.

Précisons tout de suite une différence géométrique fondamentale entre le cas d'un difféomorphisme et celui d'un flot. Si l'on interprète le triplet de distributions invariantes (E^s, E^c, E^u) d'un flot d'Anosov (φ^t) comme une structure géométrique $\mathcal{S}$, (φ^t) définit un sous-groupe à un paramètre du groupe des automorphismes de $\mathcal{S}$. Si (φ^t) est maintenant remplacé par les itérées d'un difféomorphisme f préservant $\mathcal{S}$, on passe d'une copie de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ à une copie de $\mathbb{Z}$, et la perte d'information devient manifeste : il n'y a *a priori* aucune raison pour que $\mathcal{S}$ admette dans ce cas un sous-groupe à un paramètre d'automorphismes.

2.2.1. *Difféomorphismes partiellement hyperboliques.* Les *difféomorphismes partiellement hyperboliques* constituent des analogues naturels aux flots d'Anosov pour les temps discrets, ils ont été particulièrement étudiés depuis la fin des années 90 et constituent actuellement un domaine de recherche extrêmement actif (voir par exemple [CP15] pour une introduction précise au sujet, et [HP18] pour un *survey* datant de 2018 concernant les résultats de classification).

Un difféomorphisme f d'une variété compacte M est dit *partiellement hyperbolique* si $\mathrm{D}f$ préserve une décomposition $\mathrm{T}M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ du fibré tangent à M, telle que E^s (respectivement E^u) est uniformément contractée (resp. dilatée) par f (au sens de (2.1)), et telle que la décomposition soit *dominée*. La notion de domination ne jouant aucun rôle dans les résultats et les questions présentés par la suite, nous ne attarderons pas à son sujet ; disons simplement, pour en transmettre une idée intuitive, qu'elle consiste à supposer E^c « exponentiellement moins contractée » que E^s et « exponentiellement moins dilatée » que E^u.

2.2.2. *Rigidité des difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact.* Pour un difféomorphisme partiellement hyperbolique f, le cas analogue à celui étudié dans [Ghy87, BFL92] pour les flots d'Anosov de contact est celui où chacune des trois *distributions invariantes* E^s, E^c et E^u est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et où $E^s \oplus E^u$ est par ailleurs une distribution de contact. Les temps un des flots d'Anosov de contact algébriques introduits précédemment fournissent les premiers exemples de tels difféomorphismes partiellement hyperboliques. Il est également possible d'en construire des exemples algébriques qui ne sont le temps un d'aucun flot d'Anosov sur des quotients compacts $\Gamma\backslash\mathrm{Heis}(3)$ du groupe d'Heisenberg. Ces exemples sont obtenus à partir d'automorphismes affines de $\mathrm{Heis}(3)$ préservant le réseau Γ, et nous les appellerons *automorphismes affines partiellement hyperboliques de nil-variétés* (voir par exemple [MM21b, §1.1], ou [Ham13, Sma67] pour un panorama plus général de ces exemples algébriques). Nous pouvons maintenant énoncer le résultat ci-dessous, qui constitue, dans le cas où la somme $E^s \oplus E^u$ est de contact, un analogue au résultat de [Ghy87] pour le cas des temps discrets.

Théorème A ([MM21b, Theorem A]). *Soit f un difféomorphisme partiellement hyperbolique d'une variété fermée et connexe M de dimension trois, dont les distributions invariantes sont lisses, tel que $E^s \oplus E^u$ est de contact, et dont l'ensemble non-errant est égal à M. Alors modulo revêtements et itérées finis, f est $\mathcal{C}^\infty$-conjugué à l'un des exemples suivants :*

(1) le temps un d'un flot d'Anosov de contact algébrique,

(2) ou un automorphisme affine partiellement hyperbolique de nil-variété.

Un point $x \in M$ est non-errant s'il existe une suite d'entiers $k_n \to +\infty$ et une suite de points x_n convergeant vers x, tel que $f^{k_n}(x_n)$ converge vers x. Si f préserve une mesure borélienne finie de support total, par exemple celle induite par une forme de volume continue, alors le théorème de récurrence de Poincaré impose à tous les points d'être non-errants. Or si un flot non-singulier (φ^t) d'une variété de dimension $2n+1$ préserve un champ de plans de contact H et lui est transverse, alors la formule $\theta(\frac{d\varphi^t}{dt}) = 1$ définit une 1-forme de contact *canonique* θ de noyau H, préservée par (φ^t). Un tel flot (φ^t) préserve donc toujours un volume $\theta \wedge (d\theta)^n$, si bien que l'absence de points errants est automatiquement vérifiée en présence d'un flot préservant une structure de contact H. À l'opposé, un difféomorphisme f peut tout à fait préserver une structure de contact H sans préserver la moindre forme de contact de noyau H – des exemples de tels difféomorphismes seront fournis par les automorphismes essentiels construits au théorème D ci-dessous. Ceci explique que l'hypothèse sur l'absence de points errants, inutile dans le cas des flots, fasse son apparition dans cet énoncé. C'est la manifestation la plus immédiate de la différence fondamentale entre l'étude des flots et celle des difféomorphismes, qui devient plus claire encore lors de l'étude de la structure géométrique associée : l'existence d'un flot non-singulier préservant cette structure est une contrainte bien plus forte que celle fournie par un simple difféomrphisme.

Bien qu'il me semble important de replacer dans un premier temps la discussion dans le cadre des difféomorphismes partiellement hyperboliques, la conclusion du théorème A demeure sans aucune hypothèse de domination sur la distribution lisse E^c, qui doit simplement être préservée par $\mathrm{D}f$. Par ailleurs, la méthode utilisée n'utilise pas non plus l'hypothèse d'uniformité sur la contraction (respectivement expansion) des distributions E^s et E^u par f. Afin de fournir un résultat plus précis, convenons donc de dire qu'une distribution E est *faiblement contractée* par f si pour tout $x \in M$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{D}_x f^n|_E\| = 0 \text{ ou } \lim_{n\to-\infty} \|\mathrm{D}_x f^n|_E\| = 0. \tag{2.2}$$ [2]

Nous pouvons alors formuler l'énoncé ci-dessous (dont le théorème A est un corollaire immédiat, grâce à un résultat de Brin dans [Bri75]).

Théorème B ([MM21b, Theorem B]). *Soit f un difféomorphisme d'une variété fermée et connexe M de dimension trois, préservant un scindement lisse $\mathrm{T}M = E^\alpha \oplus E^c \oplus E^\beta$ tel que $E^\alpha \oplus E^\beta$ est une distribution de contact. Si f a une orbite dense et si E^α et E^β sont toutes deux faiblement contractées au sens de* (2.2)*, alors les conclusions du théorème* A *s'appliquent à f.*

2.3. **Géométries de chemins, géométries de Cartan et rigidité.** L'énoncé du théorème B met en avant, non plus une propriété dynamique d'hyperbolicité (partielle) sur le difféomorphisme f, mais le fait que ce dernier soit un *automorphisme* de la structure géométrique $\mathcal{S} = (E^\alpha, E^\beta, E^c)$ – c'est à dire que $f^* E^\varepsilon = E^\varepsilon$ pour chacune des trois distributions. Une telle structure $\mathcal{S}$, définie par un scindement de $\mathrm{T}M$ en trois champs de droites lisses tels que la somme $E^\alpha \oplus E^\beta$ des deux premiers est une structure de contact, et que nous appellerons *géométrie de chemins enrichie*, se trouve être *rigide* au sens où son pseudo-groupe d'automorphismes locaux est de dimension finie. [3]

L'idée centrale est alors que l'existence d'un automorphisme f de $\mathcal{S}$ engendrant un groupe non-compact est de nature exceptionnelle (car $\mathcal{S}$ étant rigide, elle est génériquement vouée à avoir « peu » d'automorphismes), et que les structures $\mathcal{S}$ admettant un tel automorphisme devraient donc être assez rares pour être classifiables géométriquement. En retour, une connaissance précise de $\mathcal{S}$ devrait permettre la classification dynamique de f – l'idée étant que si l'on comprend bien une structure géométrique, on s'attend à comprendre tout aussi bien ses automorphismes.

2.3.1. *Géométries de chemins.* La structure sous-jacente à une géométrie de chemins enrichies $\mathcal{S} = (E^\alpha, E^\beta, E^c)$, et qui est en réalité à l'origine de sa rigidité, est le couple $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ de champs de droites transverses de somme contact, que nous appellerons *géométrie de chemins*. Cette structure est parfois également appelée *structure Lagrangienne de contact* – dénomination que j'ai utilisée dans [MM21b], bien qu'il me semble désormais que l'appellation géométrie de chemins est plus fidèle au point de vue original sur ces structures, dont l'étude remonte à Élie Cartan dans [Car24] (et peut-être même, plus précisément, à Sophus Lie avant lui).

2. On notera que cette notion est proche de celle d'*isomorphisme quasi-Anosov* étudiée par Mañé dans [Mañ77] (et appliquée au fibré quotient $\mathrm{T}M/E^c$ dans notre cas), bien qu'elle ne lui pas soit équivalente.

3. Plus précisément : en tout point $x \in M$, la sous-algèbre $\mathfrak{kill}^{loc}_{\mathcal{S}}(x)$ formée des *champs de Killing locaux* de $\mathcal{S}$ définis au voisinage de x , *i.e.* des champs de vecteurs locaux dont le flot préserve $\mathcal{S}$, est de dimension finie.

En effet, un exemple naturel de géométrie de chemins est obtenu de la manière suivante sur le projectivisé $\pi\colon M = \mathbf{P}(\mathrm{T}\Sigma) \to \Sigma$ du fibré tangent à une surface Σ. Supposons Σ munie d'une classe projective $[\nabla]$ de connexion affines, c'est à dire d'un ensemble de connexions ayant les même géodésiques non-paramétrées – on peut par exemple considérer les géodésiques d'une métrique Riemannienne. Alors par tout point $x = (p, l) \in \mathbf{P}(\mathrm{T}\Sigma)$ passe une unique courbe $\mathcal{F}^\beta(x)$ définie par les tangentes à la géodésique de $[\nabla]$ passant par $p \in \Sigma$ dans la direction $l \in \mathbf{P}(\mathrm{T}_p\Sigma)$. Ces courbes définissent un feuilletage $\mathcal{F}^\beta$ de dimension un de M dont on note E^β la distribution tangente. En notant $E^\alpha = \mathrm{Ker}\mathrm{D}\pi$ la direction des fibres de la projection π, on vérifie que $E^\alpha \oplus E^\beta$ est de contact, et donc que $\mathcal{L}_{[\nabla]} = (E^\alpha, E^\beta)$ est une géométrie de chemins.

Ayant constaté que seule la structure projective de la surface Σ est pertinente pour étudier la géométrie de chemins induite, il est naturel de commencer par considérer le plan projectif $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$. En notant $\mathbb{R}\mathbf{P}^2_*$ l'espace des droites projectives de $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$, le fibré $\mathbf{P}(\mathrm{T}\mathbb{R}\mathbf{P}^2) \to \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ s'identifie alors à la première projection $\pi_\alpha\colon \mathbf{X} \to \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ de l'*espace des drapeaux* $\mathbf{X} = \{(p, D) \mid p \in D\} \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \times \mathbb{R}\mathbf{P}^2_*$, la distribution E^β étant quand à elle tangente aux fibres de la seconde projection π_β. Nous noterons $\mathcal{L}_\mathbf{X}$ la géométrie de chemins ainsi définie sur $\mathbf{X}$. L'espace de drapeaux $\mathbf{X}$ admet une action transitive du groupe $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve la structure $\mathcal{L}_\mathbf{X}$ que nous y avons définie ; en réalité $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ est exactement le groupe d'automorphismes de la géométrie de chemins $\mathcal{L}_\mathbf{X}$ – voir par exemple [MM20, Théorème 4.1.8].

2.3.2. *Géométries de Cartan modelées sur l'espace des drapeaux.* Les géométries de chemins constituent un exemple (parmi bien d'autres) de structure géométrique rigide pouvant être décrite par le biais des *géométries de Cartan*. Cette notion consiste à relier intimement une structure géométrique $\mathcal{S}$ à un *espace homogène modèle* $X = G/P$, muni d'une structure $\mathcal{S}_X$ G-invariante du même type que $\mathcal{S}$ (par exemple, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_X$ sont toutes deux des géométries de chemins, ou toutes deux des métriques Riemanniennes). Alors que les (G, X)-structures décrivent les structures $\mathcal{S}$ qui sont localement isomorphes à X, les *géométries de Cartan modelées sur* G/P permettront quant à elles de représenter toutes les structures « infinitésimalement modelées » sur X. L'exemple de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, homogène sous l'action des isométries affines, donne un sens très concret à cette affirmation : les géométries de Cartan modelées sur $\mathbb{R}^n$ correspondent exactement aux variétés Riemanniennes, et ces dernières consistent bien en la donnée d'une version infinitésimale, variant d'un espace tangent à l'autre, d'un espace euclidien. Dans notre cas, les géométries de Cartan modelées sur l'espace des drapeaux $\mathbf{X}$ homogène sous l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, correspondent exactement à l'ensemble des géométries de chemins de dimension trois.

Cette description serait sympathique mais incomplète si l'on ne pouvait distinguer, parmi les géométries de Cartan modelées sur $X = G/P$, c'est à dire parmi les « versions courbes » de X, celles qui sont localement isomorphes à X. C'est exactement ce que nous fournit la notion de *courbure* d'une géométrie de Cartan, prolongeant en cela celle de courbure Riemannienne : cette courbure s'annule précisément lorsque la géométrie de Cartan correspond à une (G, X)-structure, auquel cas la géométrie est dite *plate*. Les géométries de Cartan, originellement introduite par Élie Cartan [Car10] se trouvent donc précisément à l'intersection des points de vue de Klein ((G, X)-structures) et de Riemann (métriques Riemanniennes) sur la géométrie, remarque qui guide la très belle exposition des géométries de Cartan donnée dans [Sha97].

2.3.3. *Rigidité pour les géométries de chemins strictes.* Différents travaux ont d'ores et déjà démontré la richesse des outils fournis par les géométries de Cartan pour traiter de problèmes globaux reliant géométrie et dynamique dans divers contextes (voir par exemple, parmi bien d'autres, [MP22, Fra20] au sujet des métriques Lorentziennes et de leurs classes conformes), et dans le cas des difféomorphismes partiellement hyperboliques de type contact, la géométrie de Cartan associée à la géométrie de chemins $\mathcal{L} = (E^s, E^u)$ joue un rôle crucial dans l'étude de la géométrie enrichie $\mathcal{S} = (E^s, E^c, E^u)$. Comme je le détaillerai dans les paragraphes 3.1 et 3.2, je pense que les méthodes développées dans ce cadre pourraient se montrer fécondes au sein de différentes questions de dynamique différentiable.

Pour donner un exemple d'une telle utilisation, je présente maintenant un résultat obtenu en collaboration avec Elisha Falbel et Jose Miguel Veloso. Les deux exemples apparaissant dans le théorème A préservent en réalité plus que la géométrie de chemins enrichie (E^s, E^u, E^c). Nous avons déjà vu qu'un flot Anosov de contact (φ^t) préserve la 1-forme de contact de noyau $E^s \oplus E^u$ et valant 1 sur $\frac{d\varphi^t}{dt}$. On remarque par ailleurs facilement que les automorphismes affines partiellement hyperboliques de nil-variété préservent également une 1-forme de contact de noyau $E^s \oplus E^u$, et de direction de Reeb E^c. Ceci nous amène à considérer la structure géométrique $\mathcal{T} = (E^\alpha, E^\beta, \theta)$ appelée *géométrie de chemins stricte*, définie par une géométrie de chemins (E^α, E^β) associée à une forme de contact θ de noyau $E^\alpha \oplus E^\beta$. Une telle structure $\mathcal{T}$ contient une géométrie de chemins enrichie sous-jacente $\mathcal{S}_\mathcal{T}$ dont la direction centrale est engendrée par le champ de Reeb de θ, et $\mathcal{S}_\mathcal{T}$ apparaît alors comme une « classe conforme » de structures strictes $\mathcal{T}$. Nous obtenons le résultat de rigidité suivant pour les géométries de chemins strictes.

Théorème C ([FMMV21, Theorem 1.1])**.** *Soit $\mathcal{T}$ une géométrie de chemins stricte sur une variété M fermée et connexe de dimension trois, dont le groupe d'automorphismes* $\mathrm{Aut}(M, \mathcal{T})$ *est non-compact et admet une orbite dense. Alors $(M, \mathcal{T})$ est isomorphe à l'une des deux familles d'exemples du théorème A.*

2.4. **Compactifications de géométries de chemins.** Nous avons pour le moment observé les fortes contraintes imposées sur une géométrie de chemins enrichie $\mathcal{S} = (E^\alpha, E^\beta, E^c)$ (théorème B) ou stricte $\mathcal{T} = (E^\alpha, E^\beta, \theta)$ (théorème C) par un groupe d'automorphisme manifestant une dynamique riche. Mais qu'en est-il d'une géométrie de chemins $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ sans structure supplémentaire : est-il raisonnable d'espérer une classification des géométries de chemins de groupe d'automorphisme non-compact ?

2.4.1. *Automorphismes essentiels de géométries de chemins.* On notera que pour les exemples rencontrés jusqu'ici de géométries de chemins $\mathcal{L}$, il existe toujours une forme de contact θ de noyau $E^\alpha \oplus E^\beta$ telle que le groupe d'automorphismes de la structure stricte $(E^\alpha, E^\beta, \theta)$ soit lui-même non-compact. Il est facile de construire sur $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$ des géométries de chemins enrichies admettant des automorphismes *non-équicontinus* (c'est à dire engendrant un groupe non relativement compact pour la topologie compacte-ouverte), et *non conservatifs* (c'est à dire ne préservant aucune forme volume continue), cette seconde propriété assurant en particulier qu'un tel automorphisme ne peut préserver aucune géométrie stricte associée.

Il est cependant moins facile d'exhiber des exemples de géométries de chemins compactes admettant des automorphismes non-équicontinus et ne préservant aucune distribution transverse à la distribution de contact, c'est à dire ne préservant aucune géométrie de chemins enrichie compatible. Nous appellerons ces automorphismes *essentiels*, par analogie avec les transformations conformes essentielles d'une structure pseudo-Riemannienne conforme, qui ne préservent aucune métrique de la classe conforme (voir par exemple [Fra05] où de tels automorphismes sont construits en signature Lorentzienne). En l'absence de tels automorphismes, on ne détecterait aucun phénomène dynamique spécifique aux géométries de chemins qui les séparerait de leurs analogues enrichies.

2.4.2. *Compactifications géométriques de flots géodésiques.* La recherche de géométries de chemins sur des variétés de topologie non-triviale, admettant des automorphismes non-équicontinus et essentiels, m'a amené à considérer le problème suivant.

Si Σ est une surface hyperbolique complète, les horocycles stable et instable du plan hyperbolique définissent toujours sur $\mathrm{T}^1\Sigma$ deux champs de droites lisses E^s et E^u de somme contact, et pour une métrique Riemannienne spécifique sur $\mathrm{T}^1\Sigma$ (la métrique de Sasaki, invariante par le groupe d'isométries de Σ), E^s et E^u sont respectivement contractées et dilatées par le flot géodésique de Σ au sens de (2.1). Mais il essentiel de constater que si Σ est non-compacte, ces estimées ne sont pas une propriété intrinsèque du flot géodésique (g^t), mais seulement de (g^t) pour une métrique Riemannienne spécifique : sur une variété non-compacte, la propriété d'Anosov n'est *pas* indépendante de la métrique.

Dans cette situation, il est donc naturel de chercher à compactifier le flot géodésique tout en gardant l'information géométrique fournie par la géométrie de chemins (g^t)-invariante $\mathcal{L}_\Sigma = (E^s, E^u)$. Plus précisément, on cherche une variété compacte M où $\mathrm{T}^1\Sigma$ se plonge comme un ouvert, et qui soit munie d'un flot (φ^t) ainsi que d'une géométrie de chemins (φ^t)-invariante $\mathcal{L}$

qui étendent respectivement le flot géodésique (g^t) et la structure $\mathcal{L}_\Sigma$. En réponse à cette question, j'obtiens le résultat suivant.

Théorème D ([MM21a, Theorem A])**.** *Soient $g_1, \dots, g_d$ des éléments hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de points fixes deux à deux distincts. Alors il existe des entiers $r_i > 0$ tels que l'on ait les résultats suivants concernant la surface hyperbolique $\Sigma = \langle g_1^{r_1}, \dots, g_d^{r_d} \rangle \backslash \mathbf{H}^2$.*

(1) La géométrie de chemins $(\mathrm{T}^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma)$ admet une compactification $(M, \mathcal{L})$.

(2) De plus, le flot géodésique de $\mathrm{T}^1\Sigma$ s'étend sur M en un flot d'automorphismes de $\mathcal{L}$, non-équicontinu, non-conservatif et essentiel.

Notons que le passage du groupe de Schottky engendré par les g_i à celui engendré par les $g_i^{r_i}$ ne modifie pas la topologie du quotient, et que l'on obtient en particulier des exemples pour toute surface topopologique non-compacte sous-jacente de groupe fondamental finiment engendré – ce qui satisfait, au moins partiellement, notre recherche d'exemples.

Cet énoncé affirme d'une part l'existence d'une compactification géométrique de la structure $(\mathrm{T}^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma)$, et étudie par ailleurs les propriétés dynamiques du flot géodésique étendu à cette compactification. L'existence de la compactification repose en grande partie sur celle d'un ouvert Ω_Γ de l'espace des drapeaux $\mathbf{X}$ admettant une action propre et cocompacte d'un sous-groupe discret Γ particulier de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, dont l'action sur $\mathbf{X}$ est de type Schottky. Si l'existence de cet ouvert peut être obtenue comme la conséquence de résultats généraux sur les représentations Anosov dûs à de nombreux auteurs, voir [GW12, KLP18, BPS19], nous proposons dans [MM21a] une description élémentaire de l'ouvert Ω_Γ dans le cas particulier d'un sous-groupe de Schottky Γ agissant sur l'espace des drapeaux. Une analyse détaillée des motifs dynamiques d'une suite de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ agissant sur $\mathbf{X}$ nous permet en effet de décrire explicitement un domaine fondamental de l'action de Γ sur Ω_Γ. Cette analyse nous est par ailleurs utile par la suite pour décrire la dynamique du flot géodésique compactifié (φ^t) et prouver, en particulier, qu'il est non-conservatif et essentiel (voir [MM21a, Theorem A] pour plus de détails sur la dynamique de (φ^t)).

3. Projet de recherche

Je décris dans cette section mes projets de recherche dans un ordre thématique, dans l'espoir de mettre en avant leurs connexions ainsi que les liens qu'ils entretiennent avec les résultats décrits précédemment.

3.1. **Rigidité des difféomorphismes partiellement hyperboliques en dimension trois.** Comme nous l'avons déjà souligné, un flot d'Anosov lisse (φ^t) préserve toujours une 1-forme continue dite *canonique*, nulle sur $E^s \oplus E^u$ et valant 1 sur le champ de vecteur $\frac{d\varphi^t}{dt}$. Si la variété est de dimension impaire et la somme $E^s \oplus E^u$ de classe $\mathcal{C}^1$, cette 1-forme invariante est de classe $\mathcal{C}^1$ ce qui impose alors automatiquement la dichotomie suivante : $E^s \oplus E^u$ est intégrable ou de contact.[4] Le flot est orbite-équivalent à la suspension d'un difféomorphisme Anosov dans le cas intégrable (voir [Pla72, Theorem 3.1]), et dans le cas de contact, si E^s et E^u sont de plus individuellement lisses, il est orbite-équivalent au flot géodésique d'un espace localement symétrique de courbure strictement négative selon [Ghy87, BFL92].[5] Dans le cas d'un difféomorphisme partiellement hyperbolique f, une telle dichotomie n'est plus automatique, en premier lieu car l'existence d'une 1-forme de noyau $E^s \oplus E^u$ préservée par f n'est plus automatique.

3.1.1. *Trichotomie géométrique.* Malgré cette difficulté inhérente au cas des difféomorphismes, il demeure naturel de chercher à compléter la description entamée par le théorème A en se libérant de l'hypothèse de contact, et en classifiant les difféomorphismes partiellement hyperboliques f en dimension trois dont les trois distributions invariantes E^s, E^c et E^u sont lisses. Nous supposerons de plus le difféomorphisme f considéré sans point non-errant dans la discussion qui suit, puisqu'il semble difficile de retrouver cette propriété purement dynamique par des hypothèses géométriques.

4. Ceci repose essentiellement sur la théorie ergodique des flots d'Anosov dûe à Sinai et Ruelle, appliquée à la forme continue $\theta \wedge (d\theta)^n$ si $\dim M = 2n+1$, voir [Bow75, Corollary 4.13, Theorem 4.14] et [Pla72, Lemma 4.2].

5. Sans nous appesantir sur cette subtilité, soulignons que la somme $E^s \oplus E^u$ peut en revanche être de classe $\mathcal{C}^1$ et de contact sans que E^s et E^u soient individuellement lisses, comme le montrent les exemples de [FH].

Récemment, un résultat partiel a été obtenu dans cette direction dans [CPRH20], puis précisé dans [AM21] (par des méthodes totalement indépendantes et purement géométriques). Ces résultats font cependant une hypothèse additionnelle très restrictive sur le difféomorphisme f considéré, en supposant sa différentielle constante dans un champ de repère bien choisi (je dirai par la suite que que *les exposants de f sont constant*).[6] Il serait souhaitable de disposer d'un résultat de classification sans hypothèse *a priori* sur le difféomorphisme.

Une stratégie pourrait être de montrer que les exposants sont nécessairement constants dans le cas de distributions invariantes lisses afin de se ramener au résultat de [CPRH20, AM21]. Il me semble cependant plus naturel d'adopter un point de vue tout à fait géométrique, en considérant le triplet (E^s, E^u, E^c) comme une structure dont le comportement varie entre un ouvert O de la variété M où $E^s \oplus E^u$ est de contact et son complémentaire. Notons que le choix d'un point de vue purement géométrique est d'une certaine manière encouragé par le fait qu'un tel point de vue a permis d'obtenir dans [AM21] un résultat plus précis que le résultat original de [CPRH20], et ceci d'une manière plus élémentaire. Plus précisément, on peut considérer $E^s \oplus E^u$ co-orientable quitte à passer à un revêtement fini, auquel cas $E^s \oplus E^u = \operatorname{Ker} \theta$ pour une 1-forme θ (qui n'a aucune raison d'être f-invariante) dont le comportement local ne dépend que de $E^s \oplus E^u$. Plus précisément, le fermé $M \setminus O$ des points d'annulation de la 3-forme $\theta \wedge d\theta$ sont indépendant de θ.

Le cas où $O = \varnothing$ est celui où $E^s \oplus E^u$ s'intégre en un feuilletage. Cette situation sort (E^s, E^u) du cadre d'étude des structures géométriques rigides, et nécessitera pour cette raison une analyse séparée qui reposera fortement sur les propriétés spécifiques des feuilletages de dimension deux des variétés de dimension trois. Je laisse provisoirement de côté cette situation. Le cas où $O = M$ est traité par le théorème A. Reste le cas où O est un ouvert strict et non-vide de M.

3.1.2. *Dégénérescence d'une géométrie de chemins.* Au delà de son intérêt propre du point de vue des difféomorphismes partiellement hyperboliques, il me semble que cette situation soulève un problème géométrique intéressant en soi : celui d'une structure géométrique rigide, ici la géométrie de chemins $\mathcal{L} = (E^s, E^u)|_O$, définie sur un ouvert strict O d'une variété M et « dégénérant » sur le bord de O. On peut par exemple penser, pour se ramener à un cas plus familier, à un champ lisse de formes quadratiques positives sur M, qui serait non-dégénéré sur un ouvert O et y définirait donc une métrique Riemannienne, mais qui deviendrait dégénéré sur le bord de O.

Une première stratégie pour aborder ce problème est de chercher à montrer directement que $O = M$, en faisant coïncider dans le cas contraire deux phénomènes irréconciliables : d'une part la géométrie de chemins $\mathcal{L}$ définie sur O admet une extension à M, mais d'autre part $\mathcal{L}$ est nécessairement maximale (*i.e.* tout plongement dans une autre géométrie de chemins est surjectif) pour des raisons tenant à la dynamique bien particulière de son automorphisme f de nature partiellement hyperbolique. Une seconde stratégie est de se contenter de l'existence de la géométrie de chemins $\mathcal{L}$ invariante par f sur l'ouvert non-vide O pour contraindre f assez fortement sur O, en espérant que ces contraintes forcent *a posteriori* la nature de f sur toute la variété M. Je ne sais pas encore si l'une ou l'autre de ces stratégies (ou aucune, ou chacune) se révèlera pertinente.

3.2. **Difféomorphismes partiellement hyperboliques de type contact en dimension supérieure.** La question que nous avons discutée pour le moment en dimension trois fait sens en dimension supérieure : on peut espérer un analogue dans le cas des difféomorphismes partiellement hyperboliques au théorème de Benoist-Foulon-Labourie pour les flots d'Anosov de contact.

3.2.1. *Géométries de chemins en dimension supérieure.* On s'intéresse donc maintenant aux difféomorphismes partiellement hyperboliques f en dimension (impaire) quelconque *de type contact*, c'est à dire dont les distributions invariantes sont lisses et telles que $E^s \oplus E^u$ est une distribution de contact. Les distributions stable et instable d'un tel difféomorphisme demeurent intégrables, donc en particulier *Legendriennes* : pour toute forme de contact locale θ de noyau $E^s \oplus E^u$, $d\theta$ est identiquement nulle en restriction à E^s et à E^u. Ceci fait du couple $\mathcal{L} = (E^s, E^u)$ une *géométrie de chemins en dimension supérieure.* Tout comme en dimension trois, $\mathcal{L}$ est alors une structure

6. Plus précisément, [CPRH20, AM21] supposent qu'il existe un repère global formé par trois champs de vecteurs lisses engendrant respectivement E^s, E^c et E^u, dans lequel la matrice (diagonale) représentant $\mathrm{D}f$ est constante.

géométrique rigide qui peut être décrite comme une géométrie de Cartan, dont l'espace homogène modèle $\mathbf{X}_{2n+1}$ est en dimension $2n+1$ l'espace des hyperplans projectifs pointés de $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$, homogène sous l'action de $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$. La géométrie de Cartan de $\mathcal{L}$ est d'une aide précieuse pour comprendre f, mais la généralisation à la dimension supérieure est loin d'être immédiate.

En effet, les géométries de chemins manifestent en dimension trois un phénomène tout à fait exceptionnel : une structure dont le pseudo-groupe d'automorphismes locaux est de dimension au moins 4 en un point y est *plate*, c'est à dire localement isomorphe au modèle $\mathbf{X}_3$ – de manière équivalente, la courbure de sa géométrie de Cartan est nulle (ceci est dû à Tresse dans [Tre96], voir également [MM21b, Théorème 3.3]). À l'inverse, il existe en dimension $N > 3$ des géométries de chemins non-plates dont le pseudo-groupe des automorphismes locaux est de dimension supérieure à $N+1$. Pour ce qui nous intéresse, ceci survient pour les géométries de chemins (E^s, E^u) préservées par les flots géodésiques des espaces localement symétriques de courbure strictement négative de dimension au moins trois.

Tout comme pour la dimension trois, une difficulté importante dans l'étude des difféomorphismes partiellement hyperboliques de type contact de dimension supérieure est par ailleurs l'absence, *a priori*, d'une forme de contact de noyau $E^s \oplus E^u$ préservée par le difféomorphisme. Dans un travail en cours avec Elisha Falbel, nous commençons donc l'étude de la dimension supérieure par celle d'une situation intermédiaire entre flots d'Anosov de contact et difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact, qui met provisoirement de côté ce problème.

3.2.2. *Résultat intermédiaire pour les géométries strictes.* Dans l'esprit du théorème C, nous considérons une structure géométrique plus rigide que celle fournie par un difféomorphisme en supposant l'existence d'une forme de contact préservée, tout en travaillant dans un contexte dynamique plus large qui ne présuppose l'existence d'aucun flot d'automorphismes. Nous étudions donc les *géométries de chemins strictes* de dimension supérieure, c'est à dire la donnée d'un triplet $\mathcal{T} = (E^\alpha, E^\beta, \theta)$ où (E^α, E^β) est une géométrie de chemins et θ une forme de contact de noyau $E^s \oplus E^u$, dont le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ est non-compact et admet une orbite dense.

Les résultats obtenus pour le moment nous laissent penser que la situation sera similaire à celle de la dimension trois étudiée par le théorème C, à savoir que les seuls exemples seront fournis par : les flots géodésiques d'espaces localement symétriques à courbure strictement négative, ou des automorphismes partiellement hyperboliques définis sur des quotients compacts de groupes de Lie nilpotents. Ceci est de bon augure pour entamer par la suite l'étude des difféomorphismes partiellement hyperboliques de type contact sans forme de contact préservée *a priori*.

3.3. **Géométries de chemins plates et compactifications.** Le théorème D décrit de nouveaux exemples de géométries de chemins plates dont le groupe d'automorphismes est non-compact, et ouvre au sujet de ces géométries de chemins en dimension trois deux questions de nature essentiellement géométrique (à la différence des problèmes abordés précédemment qui ont toujours une composante dynamique), que je souhaiterais étudier à plus long terme et que j'introduis maintenant.

3.3.1. *Compactifications de structures Kleiniennes ouvertes.* Dans [Bar10], Barbot construit de nombreux exemples de géométries de chemins plates en dimension trois, *i.e.* de $(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}), \mathbf{X})$-structures, dont les holonomies sont des *représentations Anosov* d'un groupe de surface dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. Plus récemment, Falbel et Thebaldi construisent dans [FT15] une $(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}), \mathbf{X})$-structure sur une variété hyperbolique complète ouverte de dimension trois, en introduisant une notion de tétraèdres idéaux dans $\mathbf{X}$ (leur méthode est un analogue dans l'espace des drapeaux de la construction par Thurston de structures hyperboliques sur le complémentaire de nœuds dans $\mathbf{S}^3$). L'existence d'une telle structure sur une variété hyperbolique *fermée* de dimension trois semble en revanche être une question ouverte pour le moment, et nous voudrions comprendre, en collaboration avec Elisha Falbel, si les méthodes introduites dans [MM21a] pourraient permettre de compactifier différentes géométries de chemins plates (à la manière des *remplissages des Dehn* pour les structures hyperboliques), et en particulier de construire une telle structure sur une variété hyperbolique fermée de dimension trois.

3.3.2. *Minimalité des compactifications et maximalité des géométries de chemins.* Les compactifications construites au théorème D recèlent des propriétés étonnantes au premier regard : elles contiennent en effet quatre copies disjointes de la structure $(\mathrm{T}^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma, g^t)$. Ce phénomène est moins surprenant lorsque l'on sait que la compactification obtenue dans [CG17] d'une seconde géométrie de chemins sur $\mathbf{P}(\mathrm{T}\Sigma)$, la structure $\mathcal{L}_{[\nabla]}$ définie par la classe projective de la surface hyperbolique Σ, contient de son côté deux copies de $(\mathbf{P}(\mathrm{T}\Sigma), \mathcal{L}_{[\nabla]})$ (soulignons que cette seconde géométrie de chemins, introduite au paragraphe 2.3.1, n'est pas préservée par le flot géodésique). Cette coïncidence n'en est toutefois certainement pas une, et soulève une question naturelle : ces géométries de chemins admettent-elles des compactifications où elles se plongent de manière dense ?

S'il est relativement facile de montrer que ceci est impossible si l'on présuppose la compactification *Kleinienne*, c'est à dire de la forme $\Gamma\backslash\Omega$ avec Ω un ouvert du modèle $\mathbf{X}$ et Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, il est beaucoup plus difficile de montrer qu'une telle compactification est nécessairement Kleinienne. Ceci reviendrait un en sens à montrer que la compactification décrite par le théorème D est minimale.

Je suis par ailleurs également intéressé par la question opposée, consistant à obtenir des critères assurant qu'une géométrie de chemins soit *maximale* (*i.e.* que tout plongement dans une autre géométrie de chemins soit surjectif). Ces problèmes de maximalité sont intimement liés à la rigidité des difféomorphismes partiellement hyperboliques de type contact en dimension trois comme je l'ai discuté au paragraphe 3.1.2, ce qui fournit une première motivation pour s'y attarder. Par ailleurs, les questions de maximalité sont des questions naturelles et importantes pour toute structure géométrique (elles sont par exemple étudiées dans [Fra12] dans le cadre général des géométries de Cartan).

3.4. **Étude des flots d'Anosov par des structures bi-contact.** Mitsumatsu a remarqué dans [Mit95] (voir également [ET98]) que, quitte à prendre un revêtement d'indice quatre [7], la distribution tangente à un flot d'Anosov est l'intersection de deux structures de contact transverses $\xi^\pm$ respectivement *positive* et *négative* (c'est à dire « tournant en sens inverse », *i.e.* induisant des orientations opposées). Un tel couple (ξ^+, ξ^-) est appelé *structure bi-contact*, *supportant* un flot non-singulier (φ^t) si $\xi^+ \cap \xi^- = E^c \coloneqq \mathbb{R}\frac{d\varphi^t}{dt}$. Réciproquement, un flot (φ^t) se trouvant ainsi au milieu d'une structure bi-contact n'est pas nécessairement Anosov mais *projectivement Anosov*, c'est à dire qu'il préserve deux champs de plans continus E^{cs} et E^{cu}, transverses et d'intersection E^c, tels que $\mathrm{D}\varphi^t$ contracte E^{cs} exponentiellement plus que E^{cu} (en d'autres termes, le scindement $\overline{E^{cs}} \oplus \overline{E^{cu}}$ induit sur le fibré normal $\mathrm{T}M/E^c$ est dominé pour l'action du flot induit $\overline{\mathrm{D}\varphi^t}$). Il existe des flots projectivement Anosov qui ne sont pas Anosov, et il serait particulièrement intéressant de trouver une caractérisation purement géométrique des flots d'Anosov par leurs structures bi-contact supportantes.

Hozoori a montré dans [Hoz21] que l'existence d'une structure bi-contacte supportante de la forme $(\operatorname{Ker}\alpha^-, \xi^+)$ avec α^- une forme de contact dont le champ de Reeb est contenu dans ξ^+, est une condition suffisante pour que le flot supporté soit Anosov. Dans un travail en cours avec Federico Salmoiraghi, nous voudrions comprendre si l'existence d'une telle structure bi-contact est nécessaire pour tout flot d'Anosov (à revêtement fini près), ou, si la rṕonse à cette question s'avérait négative, déterminer une caractérisation dynamique des flots d'Anosov vérifiant cette condition géométrique. Nous pensons qu'une telle correspondance entre flots d'Anosov et structures géométriques pourrait se révéler extrêmement fertile, des travaux récents ayant mis en avant la pertinence de ce point de vue pour l'étude des flots d'Anosov (voir par exemple [Sal21, Sal22]).

7. Notons que, bien que l'existence d'une structure bi-contact supportante pour tout flot d'Anosov soit en général affirmée, il est clair qu'un revêtement fini puisse se révéler nécessaire (une structure de contact induisant une orientation, alors que des flots d'Anosov existent sur des variétés non-orientables). Il me semble que l'hypothèse convenable est que chacune des distributions stable et instable soit orientable, ce qui survient dans le pire des cas dans un revêtement d'indice quatre.

3.5. **Caractérisation topologique des flots conservatifs en dimension trois.** Les travaux d'Asimov [Asi76] et de Sullivan [Sul76] ont donné des conditions suffisantes pour qu'un flot non-singulier soit isotope à un flot *conservatif*, c'est à dire préservant une forme volume continue. Ces résultats laissent cependant ouverte la détermination d'une condition suffisante d'ordre topologique pour qu'un tel flot soit *orbite-équivalent* à un flot conservatif, c'est à dire qu'il existe un difféomorphisme envoyant orbites du premier flot sur orbites du second.

Il se trouve qu'un candidat naturel pour une telle condition suffisante existe. Une obstruction topologique simple pour qu'un flot de dimension trois soit orbite-équivalent à un flot conservatif est en effet l'existence d'une surface *séparante* (c'est à dire dont le complémentaire soit non-connexe) qui soit transverse au flot en chacun de ses points. Dans le cas particulier des flots d'Anosov, les travaux de Brunella [Bru93] et Asaoka [Asa08] montrent que cette obstruction est en effet la seule : un flot d'Anosov en dimension trois qui n'est transverse à aucun tore séparant est orbite-équivalent à un flot d'Anosov conservatif. Dans un projet en cours avec Tali Pinsky, nous cherchons à montrer que ce résultat demeure pour tout flot non-singulier en dimension trois.

Bibliographie

[AM21] Souheib Allout and Kambiz Moghaddamfar. On partially hyperbolic diffeomorphisms in dimension three via a notion of autonomous dynamics. *arXiv :2110.01735 [math]*, October 2021.

[Asa08] Masayuki Asaoka. On invariant volumes of codimension-one Anosov flows and the Verjovsky conjecture. *Inventiones mathematicae*, 174(2) :435, August 2008.

[Asi76] Daniel Asimov. Homotopy to divergence-free vector fields. *Topology*, 15 :349–352, 1976.

[Bar10] Thierry Barbot. Three-dimensional Anosov flag manifolds. *Geometry & Topology*, 14(1) :153–191, 2010.

[BFL92] Yves Benoist, Patrick Foulon, and François Labourie. Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables. *Journal of the American Mathematical Society*, 5(1) :33–74, 1992.

[Bow75] Robert Edward Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Berlin, Allemagne, 1975.

[BPS19] Jairo Bochi, Rafael Potrie, and Andrés Sambarino. Anosov representations and dominated splittings. *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)*, 21(11) :3343–3414, 2019.

[Bri75] M. I. Brin. Topological transitivity of one class of dynamic systems and flows of frames on manifolds of negative curvature. *Functional Analysis and Its Applications*, 9(1) :8–16, January 1975.

[Bru93] Marco Brunella. Separating the basic sets of a nontransitive Anosov flow. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 25(5) :487–490, 1993.

[Car10] Élie Cartan. Les systèmes de Pfaff, à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 27 :109–192, 1910.

[Car24] Élie Cartan. Sur les variétés à connexion projective. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 52 :205–241, 1924.

[CG17] Suhyoung Choi and William Goldman. Topological tameness of Margulis spacetimes. *American Journal of Mathematics*, 139(2) :297–345, 2017.

[CP15] Sylvain Crovisier and Rafael Potrie. Introduction to partially hyperbolic dynamics, *Lecture notes* for a minicourse at ICTP, July 2015. Available on the web-pages of the authors.

[CPRH20] Pablo D. Carrasco, Enrique Pujals, and Federico Rodriguez-Hertz. Classification of partially hyperbolic diffeomorphisms under some rigid conditions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, pages 1–12, October 2020.

[ET98] Yakov M. Eliashberg and William Paul Thurston. *Confoliations*. American Mathematical Society, Providence (R.I.), Etats-Unis d'Amérique, 1998.

[FH] Patrick Foulon and Boris Hasselblatt. Contact anosov flows on hyperbolic 3-manifolds. *Geometry & Topology*, 17(2) :1225–1252.

[FMMV21] E. Falbel, M. Mion-Mouton, and J. M. Veloso. Cartan connections and path structures with large automorphism groups. *International Journal of Mathematics*, October 2021.

[Fra05] Charles Frances. Sur les variétés lorentziennes dont le groupe conforme est essentiel. *Mathematische Annalen*, 332(1) :103–119, May 2005.

[Fra12] Charles Frances. About geometrically maximal manifolds. *Journal of Topology*, 5(2) :293–322, June 2012.

[Fra20] Charles Frances. Lorentz dynamics on closed 3-manifolds. *Annales Henri Lebesgue*, 3 :407–471, June 2020.

[FT15] Elisha Falbel and Rafael Thebaldi. A flag structure on a cusped hyperbolic 3-manifold. *Pacific Journal of Mathematics*, 278(1) :51–78, September 2015.

[FW80] John Franks and Bob Williams. Anomalous anosov flows. In Zbigniew Nitecki and Clark Robinson, editors, *Global Theory of Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics, pages 158–174, Berlin, Heidelberg, 1980. Springer.

[GD91] Mikhail Gromov and Giuseppina D'Ambra. Lectures on transformation groups : geometry and dynamics. *Surveys in differential geometry*, 1991.

[Ghy87] Étienne Ghys. Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, 20(2) :251–270, 1987.

[GW12] Olivier Guichard and Anna Wienhard. Anosov representations : domains of discontinuity and applications. *Inventiones mathematicae*, 190(2) :357–438, November 2012.

[Ham13] Andy Hammerlindl. Partial hyperbolicity on 3-dimensional nilmanifolds. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - A*, 33 :3641, 2013. arXiv : 1103.3724.

[Hoz21] Surena Hozoori. On Anosovity, divergence and bi-contact surgery. *arXiv :2109.00566 [math]*, October 2021.

[HP18] Andy Hammerlindl and Rafael Potrie. Partial hyperbolicity and classification : a survey. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 38(2), April 2018.

[KLP18] Michael Kapovich, Bernhard Leeb, and Joan Porti. Dynamics on flag manifolds : domains of proper discontinuity and cocompactness. *Geometry & Topology*, 22(1) :157–234, 2018.

[Mañ77] Ricardo Mañé. Quasi-Anosov Diffeomorphisms and Hyperbolic Manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 229 :351–370, 1977.

[Mit95] Yoshihiko Mitsumatsu. Anosov flows and non-Stein symplectic manifolds. *Annales de l'Institut Fourier*, 45(5) :1407–1421, 1995.

[MM20] Martin Mion-Mouton. *Quelques propriétés géométriques et dynamiques globales des structures Lagrangiennes de contact.* Thèse, Université de Strasbourg, December 2020.

[MM21a] Martin Mion-Mouton. Geometrical compactifications of geodesic flows and path structures. *arXiv :2112.02900 [math]*, December 2021.

[MM21b] Martin Mion-Mouton. Partially hyperbolic diffeomorphisms and lagrangian contact structures. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, pages 1–47, November 2021. In press.

[MP22] Karin Melnick and Vincent Pecastaing. The conformal group of a compact simply connected Lorentzian manifold. *Journal of the American Mathematical Society*, 35(1) :81–122, January 2022.

[Pla72] Joseph F. Plante. Anosov flows. *American Journal of Mathematics*, 94 :729–754, 1972.

[Sal21] Federico Salmoiraghi. Surgery on Anosov flows using bi-contact geometry. *arXiv :2104.07109 [math]*, May 2021.

[Sal22] Federico Salmoiraghi. Goodman surgery and projectively Anosov flows. *arXiv :2202.01328 [math]*, February 2022.

[Sha97] R.W. Sharpe. *Differential geometry : Cartan's generalization of Klein's Erlangen program. Foreword by S. S. Chern.* Berlin : Springer, 1997.

[Sma67] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73(6) :747–817, November 1967. Publisher : American Mathematical Society.

[Sul76] Dennis Sullivan. Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 36 :225–255, 1976.

[Tre96] A. Tresse. *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre* $y'' = w(x, y, y')$. Preisschriften gekrönt und hrsg. von der Fürstlich Jablonowskischen gesellschaft zu Leipzig. XXXII. Nr. XIII der mathematische-naturwissenschaftlichen section. S. Hirzel, Leipzig, 1896.

Martin Mion-Mouton, Department of Mathematics, Technion, Haifa 32000, Israel.
Adresse e-mail : `martinm@campus.technion.ac.il`
Page web : `https://martinm.webgr.technion.ac.il/`