

FLOTS ANOSOV DE CONTACT EN
DIMENSION TROIS, VIA LES STRUCTURES
LAGRANGIENNES DE CONTACT ASSOCIÉES

Martin Mion-Mouton

Mémoire de M2, Université de Strasbourg

Mémoire encadré par Charles Frances

Version du 1^{er} septembre 2017

Mai-Juillet 2017

Remerciements

Je souhaite avant tout remercier mon directeur de mémoire Charles Frances. En un an, depuis mon stage de M1 de l'an dernier, et jusqu'à la fin de cette année de M2, j'ai déjà beaucoup appris en travaillant avec lui, ou plus exactement, il m'est impossible de réaliser combien le point de vue que j'ai sur la géométrie, et ce que j'en comprend, lui est profondément dû. Je le remercie de m'avoir fait découvrir la vision intuitive, élégante, concise et efficace de la géométrie par le point de vue des espaces homogènes, et de m'amener à réaliser combien chacun de ces espaces est en lui-même d'une grande richesse. Je le remercie également pour son encadrement extrêmement attentif et ininterrompu, ses nombreux conseils, et l'intérêt qu'il me communique constamment pour la géométrie ; ma motivation pour la recherche, et plus particulièrement pour le sujet de mémoire et de thèse qu'il m'a proposés, lui est en grande partie redevable.

Je souhaite également remercier les enseignant·e-s du M2 de l'université de Strasbourg dont j'ai suivi les cours, Margherita Sandon, Olivier Guichard, Vladimir Fock et Thomas Delzant, pour la diversité de regards que leurs cours m'ont offert sur les différentes géométries, et pour leur grande disponibilité.

Je remercie mes amis de l'université de Strasbourg, cela a été un grand bonheur de les rencontrer, et un grand soutien de travailler en leur compagnie tout au long de cette année.

Je remercie enfin tous mes proches et ma famille, le soutien qu'ils m'apportent n'est pas qualifiable, et est irremplaçable.

Table des matières

Remerciements	1
Introduction	3
1 Structures lagrangiennes de contact	5
1.1 Géométrie des EDO d'ordre 2	5
1.1.1 Du point de vue analytique au point de vue géométrique	5
1.1.2 Formes et structures de contact	7
1.1.3 Équivalence avec les structures lagrangiennes de contact	9
1.2 Géométrie de l'espace modèle	10
1.2.1 $\mathbb{P}(\mathbb{TR}P^2)$ et sa structure lagrangienne de contact canonique	10
1.2.2 Deux types d'ouverts homogènes particuliers	14
1.3 (G, X) -structures et géométries de Cartan	16
1.3.1 (G, X) -structures	17
1.3.2 Géométries de Cartan	21
1.4 Problème d'équivalence pour la géométrie des EDO d'ordre 2	27
2 Flots d'Anosov	29
2.1 Définitions et première propriétés	30
2.2 Exemples, et classification en dimension trois	33
2.2.1 Premiers exemples	33
2.2.2 Classification en dimension trois	38
3 Preuve de la classification en dimension trois	39
3.1 Une géométrie de Cartan à courbure nulle	39
3.2 Première réduction de la $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{TR}P^2))$ -structure	41
3.3 Une $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{TR}P^2))$ -structure kleinienne	46
3.3.1 Quelques remarques supplémentaires sur les cercles α et β	46
3.3.2 Relèvement de chemins et revêtements	47
3.3.3 L'application développante est un revêtement sur son image	49
3.4 Élimination du cas de l'ouvert Ω_1	52
3.5 Fin de la preuve	56
3.5.1 Fin de la réduction de la $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{TR}P^2))$ -structure	56
3.5.2 Topologie de M	57
3.6 Existence de flots non hyperboliques	65
Quelques directions de recherche	67
Notations	68
A Résultats utilisés de dimension cohomologique	69
B Autres résultats	70
Références	71

Introduction

Ce mémoire a pour objectif de prouver le théorème A ci-dessous, énoncé par Étienne Ghys en 1987 dans [Ghy87]. Les deux premières sections de ce mémoire introduisent les notions de géométrie différentielle et de systèmes dynamiques apparaissant au cours de la preuve, le théorème A est énoncé dans le corps du texte au théorème 2.2.21, et sa preuve est l'objet de la troisième et dernière partie du mémoire.

Théorème A. *Soit (φ^t) un flot d'Anosov lisse sur une variété M de dimension trois, compacte connexe et orientable. Si les fibrés stable et instable de (φ^t) sont tous deux lisses, alors :*

- soit (φ^t) est conjugué à une suspension d'un automorphisme hyperbolique du tore T^2 ;
- soit (φ^t) est orbite-équivalent au flot hyperbolique standard (a^t) sur un quotient $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, où $\tilde{\Gamma}$ est un sous-groupe discret cocompact de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$.

Ce théorème classe en dimension trois les *flots d'Anosov* (voir la définition 2.1.3) dont les feuilletages stable et instable sont lisses. Une partie de ces flots est déjà connue, et les autres, appelés *flots Anosov de contact*, définissent une structure géométrique appelée *structure lagrangienne de contact*, constituée de deux distributions de rang un dans une distribution de contact (voir les définitions 1.1.15 et 3.1.1). L'hypothèse de régularité faite sur les fibrés stable et instable permet donc de prouver le théorème A à l'aide des outils de la géométrie différentielle, et plus exactement dans deux cadres géométriques associés aux espaces homogènes qui sont les (G, X) -structures et les *géométries de Cartan* (voir le paragraphe 1.3). Le résultat principal prouvé dans ce mémoire est donc finalement le théorème B ci-dessous, qui classe entièrement à conjugaison près les flots Anosov de contact en dimension trois, en classifiant les (G, X) -structures qui leur sont associées (on trouve l'énoncé et la preuve de ce second résultat dans le corps du texte au théorème 3.5.1).

Théorème B. *Soit (φ^t) un flot Anosov de contact sur une variété M de dimension trois, compacte connexe et orientable. Alors (φ^t) définit sur M une $(\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}))$ -structure complète. De plus, en notant $\tilde{\Gamma} < \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ son groupe d'holonomie, $\tilde{\Gamma}$ est un sous-groupe discret agissant librement proprement et cocompactement sur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, et il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que le flot (φ^t) sur M est conjugué au flot hyperbolique $(a^{\lambda t}) = ((0, \lambda t))$ sur le quotient $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$.*

Nous introduisons tout d'abord dans la première partie les structures lagrangiennes de contact et les outils géométriques que nous utiliserons pour les étudier. Nous commençons par introduire ces structures en présentant dans le paragraphe 1.1 une de leurs origines historiques : la théorie géométrique des équations différentielles ordinaires d'ordre 2, due à Sophus Lie et Élie Cartan. Nous nous intéressons ensuite dans le paragraphe 1.2 à l'espace homogène naturel avec lequel étudier la géométrie lagrangienne de contact, qui est l'espace homogène $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2) \equiv \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/P_{min}$ des droites projectives pointées, et nous mettons en évidence différents objets géométriques naturels sur cet espace homogène. Nous présentons ensuite brièvement au paragraphe 1.3 les (G, X) -structures et les géométries de Cartan, en nous concentrant sur les propriétés que nous utiliserons dans la suite du texte (et en renvoyant pour une bonne part à l'excellent livre [SC97]). Dans le cas des géométries de Cartan, le résultat-clé que nous utiliserons sera l'existence d'une forme de *courbure* dont l'annulation, comme dans le cas de la géométrie riemannienne, assurera que la géométrie est localement plate, ce qui correspondra exactement à être une (G, X) -structure. Nous terminons enfin cette première partie consacrée à la géométrie en expliquant au paragraphe 1.4 pourquoi l'espace homogène étudié plus tôt est bien l'espace *modèle* des structures lagrangiennes de contact, en énonçant un résultat qui permet d'étudier toutes ces structures à l'aide des géométries de Cartan modélées sur l'espace homogène $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/P_{min}$.

La deuxième partie est consacrée à introduire les notions de systèmes dynamiques que nous utiliserons. Nous nous sommes permis de commencer cette partie par une introduction d'une page reliant la notion mathématique de systèmes dynamiques à celle de systèmes physiques évolutifs, et qui constituait l'unique chance qu'une portion de ce texte soit lisible par des lecteurs·trices non mathématicien·ne·s. Nous introduisons ensuite au paragraphe 2.1 les définitions élémentaires de systèmes dynamiques dont nous aurons besoin, puis les flots d'Anosov, ainsi que leurs premières propriétés. Cette section est très courte, ce mémoire ne prétend pas fournir une introduction aux systèmes dynamiques. Nous ne démontrons aucun résultat, et notre objectif est surtout de donner une idée des propriétés élémentaires des flots d'Anosov. Les seuls résultats spécifiques aux flots Anosov utilisés dans la preuve du théorème B sont la densité des points périodiques et l'existence d'orbites denses, et sont tous deux énoncés sans preuve dans le paragraphe 2.1. Nous développons en revanche plus en détail le paragraphe 2.2 consacré aux premiers exemples de flots d'Anosov. Nous terminons cette deuxième partie en énonçant la classification des flots Anosov à feuilletages stable et

instable lisses en dimension trois (théorème 2.2.21).

La troisième et dernière partie de ce mémoire est consacrée à la présentation d'une preuve du théorème A, dont la stratégie générale est celle de Ghys dans [Ghy87]. Nous présentons cependant à différents endroits des arguments alternatifs. Le parti-pris adopté, et proposé par Charles Frances, est le suivant : se restreindre au sujet des flots Anosov aux arguments les plus classiques, ne pas utiliser certains arguments plus poussés de la théorie des flots Anosov utilisés dans l'article d'origine, et essayer autant que possible de les remplacer par des arguments plus géométriques en travaillant dans le cadre des (G, X) -structures. La stratégie de la preuve est détaillée en introduction de la partie 3.

Je remercie Charles Frances pour m'avoir conseillé d'étudier en détail l'espace modèle de la géométrie lagrangienne de contact, ce qui s'est révélé être extrêmement riche en informations. Je le remercie également de m'avoir permis de proposer dans ce mémoire une preuve différente, et entièrement géométrique, des trois dernières parties de la preuve du théorème 2.2.21, en m'expliquant que les trois théorèmes 3.3.1, 3.4.1, et 3.5.3 pouvaient être vrais, en m'ayant proposé des stratégies pour les démontrer, et en m'ayant accompagné attentivement dans leurs démonstrations. Les preuves présentées ici de ces trois résultats sont pour une part essentielle dûes à des idées de Charles Frances.

1 Structures lagrangiennes de contact

L'objectif de cette première section est d'introduire le cadre géométrique dans lequel nous allons travailler au cours de ce mémoire. Nous introduisons tout d'abord les *structures lagrangiennes de contact*, qui consistent en la donnée de deux distributions lagrangiennes transverses dans une distribution de contact sur une variété, et qui sont les structures géométriques que nous étudierons au cours de ce mémoire. Nous expliquons l'origine historique de ces structures à travers la géométrie des équations différentielles ordinaires d'ordre 2, puis nous étudions en détail l'espace modèle de ces géométries, étude qui nous sera utile dans la section 3. Nous introduisons ensuite les notions de (G, X) -structure et de géométries de Cartan, que nous utiliserons fréquemment par la suite, et nous énonçons en particulier au théorème 1.4.1 l'équivalence entre les structures lagrangiennes de contact et les géométries de Cartan normales modelées sur l'espace modèle, ainsi que la condition de normalisation associée.

1.1 Géométrie des EDO d'ordre 2

1.1.1 Du point de vue analytique au point de vue géométrique

D'une façon générale, résoudre une équation différentielle consiste à rendre cette équation équivalente à une autre équation plus simple à résoudre, et rendre des équations différentielles équivalentes consiste à trouver des changements de coordonnées envoyant les solutions de l'une sur celles de l'autre. Dans le premier tiers du 20^{ème} siècle, Élie Cartan a eu l'idée de construire un cadre mathématique pour formuler les équations différentielles indépendamment des coordonnées, à l'aide de structures géométriques ; ce point de vue est de façon générale appelé *géométrie des équations différentielles*. De cette façon, on ne garde rien d'autre que l'information strictement nécessaire pour déterminer si deux équations différentielles sont équivalentes, ce qui est la question principale car elle permet de circonscrire les cas à étudier.¹ Le travail colossal de Cartan en ce qui concerne la géométrie des équations différentielles a consisté à exhiber des structures géométriques répondant à cette question dans de très nombreux cas. Nous allons nous contenter dans cette section du cas des équations différentielles ordinaires d'ordre 2 en dimension 1 et résolues, ie de la forme suivante :

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \quad (E)$$

où $x \in \mathbb{R}$ est le paramètre réel, $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la solution de l'EDO, et $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse qui définit l'EDO. Nous appellerons désormais simplement *EDO d'ordre 2* une EDO de la forme (E), et nous fixons l'EDO d'ordre 2 à laquelle nous nous intéressons, ie si cela n'est pas précisé, on considère l'EDO (E).

La donnée d'une solution $y(x)$ de (E) est équivalente à celle de la courbe (paramétrée) $(x, y(x))$ dans \mathbb{R}^2 . Pour tout difféomorphisme ϕ de \mathbb{R}^2 , il existe une fonction lisse $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (entièrement déterminée par f , ϕ , et leurs dérivées partielles d'ordre au plus 2) telle que, si ϕ envoie le graphe paramétré de y sur celui d'une fonction \bar{y} , ie si il existe un difféomorphisme $\bar{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\phi((x, y(x))) = (\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))$, alors y est solution de (E) si et seulement si \bar{y} est solution de la nouvelle équation

$$\bar{y}''(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}), \bar{y}'(\bar{x})).$$

Ce type de transformations d'EDO est appelé dans la littérature anglaise une *point transformation*, et nous les appellerons dans cette section les *transformations de type graphe* : deux EDO d'ordre 2 seront dites *équivalentes à transformation de type graphe* près s'il existe un difféomorphisme ϕ de \mathbb{R}^2 envoyant la fonction f définissant la première EDO sur la fonction \bar{f} définissant la seconde.

Le premier pas à franchir pour étudier géométriquement les EDO d'ordre 2 est de passer de l'étude de leurs solutions $y(x)$ à celle de leurs graphes vus comme courbes (non-paramétrées) de \mathbb{R}^2 , et avec ce point de vue l'étude des EDO d'ordre 2 modulo transformations de type graphe est suffisante. Nous choisissons donc la définition suivante pour l'objectif de « géométrisation » des EDO d'ordre 2 : associer à chaque EDO une structure géométrique, tel que la classification de ces structures à symétries près soit équivalente à celle des EDO d'ordre 2 à transformations de type graphe près ; plus précisément nous allons trouver une structure géométrique telle que cette correspondance soit locale.

Nous introduisons le projectivisé du fibré tangent à \mathbb{R}^2 , que nous notons $\mathbb{P}(\mathrm{TR}^2)$; c'est le fibré des directions tangentes à \mathbb{R}^2 , et on note (p, l) , avec l une direction tangente à p , ses points. On note également

1. Cette démarche s'accompagne évidemment d'un changement de point de vue sur ce qu'est « résoudre » une équation différentielle, on abandonne par exemple la précision du paramétrage des solutions, et plus généralement on ne conserve que la distinction des propriétés qualitatives de l'ensemble des solutions.

$\pi: \mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection canonique, et on appelle $V = \ker(D\pi)$ la *distribution verticale* de $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$. Enfin, on utilisera (le plus rarement possible) sur \mathbb{R}^2 les coordonnées canoniques (x, y) , et sur $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ les coordonnées induites.

Nous n'allons pas exactement étudier les graphes N des solutions de l'EDO dans \mathbb{R}^2 , mais leur *prolongation* $N^{(1)} = \{(p, T_p N) \mid p \in N\}$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$, qui est encore une sous-variété de dimension 1. Avant de poursuivre, notons qu'une transformation de type graphe ϕ agit sur la prolongation $N^{(1)}$ du graphe d'une solution via sa *prolongation* $\phi^{(1)}$ sur $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$, qui est le difféomorphisme défini par $\phi^{(1)}(p, l) = (\phi(p), D_p \phi(l))$.

Au voisinage de toute condition initiale $((x_0, y_0), l_0)$, où l_0 est une direction tangente à $T_{(x_0, y_0)}\mathbb{R}^2$ autre que $\frac{\partial}{\partial y}$, il existe une unique solution y de (E) telle que $((x, y)(0), \frac{\partial}{\partial x} + y'(0)\frac{\partial}{\partial y}) = ((x_0, y_0), l_0)$ (cette solution est définie localement au voisinage de 0). Notons $N_{(x_0, y_0, l_0)}$ le graphe non-paramétré de y et $N_{(x_0, y_0, l_0)}^{(1)}$ sa prolongation.

Définition 1.1.1. On appelle *distribution associée à l'EDO d'ordre 2* (E) et on note E la distribution lisse de rang 1 sur $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ définie par : $E((x_0, y_0), l_0) := T_{((x_0, y_0), l_0)} N_{(x_0, y_0, l_0)}^{(1)}$.

Remarque 1.1.2. Ceci définit une distribution de rang 1 à priori seulement en dehors de la sous-variété $\{(x, y), \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial y}\}$ de $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$, mais cela ne nous dérange pas puisque notre objectif est d'étudier les solutions *locales* de l'EDO. La distribution en question est bien définie car la solution y est entièrement déterminée par le triplet (x_0, y_0, l_0) de conditions initiales, et la régularité des solutions d'une EDO assure de plus que la distribution E est lisse. Remarquons enfin que E n'est jamais contenu dans la distribution verticale.

Dans le cas de l'EDO $y'' = 0$, les graphes des solutions sont les droites affines, et les variétés intégrales à la distribution E sont définies de la façon suivante : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et l une direction tangente en (x, y) , il existe une unique droite passant par (x, y) avec la direction l , dont la prolongation est la variété intégrale à E passant par $((x, y), l)$.

Définition 1.1.3. On appelle *distribution de contact standard de la géométrie des EDO d'ordre 2* et on note C , la distribution de rang 2 sur $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ définie par $C = E \oplus V$, où E est la distribution de rang 1 associée à l'équation linéaire $y'' = 0$, et V la distribution verticale.

On vérifie facilement que :

— pour tout $q \in \mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$:

$$C(q) = \left\{ T_q N^{(1)} \mid N^{(1)} \ni q \right\} = \{ E(q) \mid E \text{ distribution associée à une EDO d'ordre 2} \}; \quad (1.1.1)$$

- en utilisant les coordonnées locales définies par $(x, y, p) \mapsto ((x, y), \mathbb{R}(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y}))$ au voisinage de $((x, y), l), l \neq \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial y}$, C s'écrit en coordonnées : $C(x, y, p) = Vect(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p})$;
- dans ces même coordonnées locales, la distribution de rang 1 E associée à l'EDO (E) s'écrit : $E(x, y, p) = \mathbb{R}(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} + f(x, y, p)\frac{\partial}{\partial p})$;
- si E est un champ de directions contenu dans la distribution de contact standard et transverse à la distribution verticale, alors E est localement de la forme ci-dessus, ie E est localement la distribution de rang 1 associée à une EDO d'ordre 2 (et une telle EDO est –localement– uniquement déterminée par E).

Par construction, si y est une solution de (E) et $N^{(1)}$ la prolongation de son graphe non paramétré, alors $N^{(1)}$ est une sous-variété intégrale de la distribution E associée à (E) . Réciproquement :

Lemme 1.1.4. Soit M une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$. Alors en dehors de $\{(p, \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial y})\}$: M est localement la prolongation du graphe d'une solution de l'EDO d'ordre 2 (E) si et seulement si M est une sous-variété intégrale de la distribution de rang 1 associée à (E) .

Démonstration. Le sens direct a déjà été prouvé. Réciproquement, si M est une sous-variété intégrale de E , on en déduit tout d'abord que la projection de M sur \mathbb{R}^2 est localement le graphe N d'une fonction $y(x)$ puisqu'on se place en dehors de $\{(p, \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial y})\}$. De plus, puisque l'espace tangent à M est en particulier contenu dans la distribution de contact, l'écriture ci-dessus en coordonnées de C montre que M est la prolongation de ce graphe, ie $M = N^{(1)}$. Enfin, en utilisant à nouveau l'écriture en coordonnées ci-dessus de E , on vérifie facilement que y est une solution de (E) puisque $M = N^{(1)}$ est une sous-variété intégrale de E . \square

Les distributions de rang 1 sur $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ contenues dans la distribution de contact standard et transverses à la distribution verticale sont donc de bons candidats pour les objets géométriques que nous cherchons pour

décrire les EDO d'ordre 2. Pour donner un sens à la correspondance que nous avons mis en évidence entre ces distributions de rang 1 et les EDO d'ordre 2, il nous faut maintenant caractériser, sans coordonnées, parmi les transformations de $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ envoyant une distribution sur l'autre, celles qui correspondent à des transformations de type graphe sur les EDO associées. Nous avons vu précédemment que l'action d'une transformation de type graphe correspond sur la prolongation du graphe d'une solution à l'action de la prolongation du difféomorphisme de \mathbb{R}^2 associé. Le lemme suivant répond donc à la question que nous nous posons.

Lemme 1.1.5. *Les prolongations de difféomorphismes (respectivement locaux) de \mathbb{R}^2 sont exactement les difféomorphismes (resp. locaux) de $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ qui préservent la distribution de contact standard C et la distribution verticale V .*

Démonstration. Le sens direct est clair. Réciproquement, si un difféomorphisme Θ de $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ préserve la distribution V , alors il préserve les fibres de π dans leur ensemble, et il existe donc un unique difféomorphisme ϕ de \mathbb{R}^2 tel que

$$\pi \circ \Theta = \phi \circ \pi. \quad (1.1.2)$$

Soit $p \in \mathbb{R}^2$, l une direction tangente en p , et l' tangente en $\phi(p)$ la direction telle que $\Theta(p, l) = (\phi(p), l')$. On note Δ la droite tangente à l en p , et $\Delta^{(1)}$ sa prolongation. Puisque Θ préserve la distribution C , il existe selon la caractérisation (1.1.1) que l'on a donné de C une sous-variété N en $\phi(p)$ dont la prolongation $N^{(1)}$ vérifie : $D_{(p,l)}\Theta(\mathbb{T}_{(p,l)}\Delta^{(1)}) = \mathbb{T}_{(\phi(p),l')}N^{(1)}$. Or on vérifie que $D_{(\phi(p),l')}\pi(\mathbb{T}_{(\phi(p),l')}N^{(1)}) = \mathbb{T}_{\phi(p)}N = l'$, et donc selon la relation (1.1.2) : $l' = D\pi \circ D\Theta(\mathbb{T}_{(p,l)}\Delta^{(1)}) = D\phi \circ D\pi(\mathbb{T}_{(p,l)}\Delta^{(1)}) = D_p\phi(l)$, ie Θ est bien la prolongation de ϕ . \square

On appellera *transformation de contact* un difféomorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ qui préserve la distribution de contact standard C . On remarque en particulier que si un difféomorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ envoie une distribution de rang 1 dans C transverse à V sur une autre de la même sorte, et préserve la distribution V , alors c'est en particulier une transformation de contact.

Nous avons finalement établi la proposition suivante.

Proposition 1.1.6. *Les deux applications décrites plus haut associant une distribution d'ordre 1 à une EDO et inversement établissent la correspondance bijective suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \text{EDO d'ordre 2 de la forme (E)} & & \text{distributions de rang 1 dans } C \text{ transverses} \\ \text{modulo transformations locales de type} & \longleftrightarrow & \text{à } V \text{ modulo transformations de contact} \\ \text{graphe} & & \text{locales préservant } V. \end{array}$$

Nous souhaitons maintenant exprimer cette correspondance indépendamment des distributions C et V qui dépendent encore des coordonnées. Il nous faut tout d'abord expliquer pourquoi nous avons appelé la distribution C définie précédemment distribution *de contact* standard (ceci sera expliqué dans l'exemple 1.1.13).

1.1.2 Formes et structures de contact

Si α est une 1-forme partout non-nulle définie sur une variété M , on dira que α engendre le champ d'hyperplans $\mathcal{D} = \ker \alpha$. On peut trouver la preuve du lemme suivant dans [Gei08, Lemma 1.1.1].

Lemme 1.1.7. *Tout champ d'hyperplans \mathcal{D} sur une variété M est en tout point localement engendré par une 1-forme non nulle, et \mathcal{D} est globalement engendré par une 1-forme si et seulement si le fibré quotient TM/\mathcal{D} est trivial, ie si il existe une distribution E de rang 1 sur M telle que $TM = \mathcal{D} \oplus E$ (on dit alors que \mathcal{D} est co-orientable).*

Définition 1.1.8 (Forme et structure de contact). Soit M une variété de dimension impaire égale à $2n + 1$, et α une 1-forme partout non-nulle définie sur M . On dit que α est une *forme de contact* si $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ ne s'annule pas sur M . On appellera *distribution de contact* une distribution d'hyperplans engendrée par une forme de contact, et on appellera *structure de contact sur M* la donnée d'une distribution de contact \mathcal{D} sur M .

Remarques 1.1.9. 1. Pour une 1-forme α , la propriété d'être une forme de contact ne dépend pas de la 1-forme elle-même mais seulement du champ d'hyperplans qu'elle engendre. En effet, toute autre 1-forme β qui définit le même champ d'hyperplans s'écrit $\beta = f\alpha$ pour f une fonction strictement positive définie sur M , et on a $\beta \wedge (d\beta)^n = f^{n+1}\alpha \wedge (d\alpha)^n$. Pour une distribution d'hyperplans, la propriété d'être de contact ne dépend donc que de la distribution, ce qui donne un sens à la notion de *distribution de contact*.

2. Une 1-forme α est de contact si et seulement si $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ est une forme volume sur M , et en particulier une variété munie d'une forme de contact est donc orientée. Soulignons également que pour une 1-forme α partout non-nulle, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ ne s'annule pas, ie α est une forme de contact ;
- (b) $(d\alpha|_{\ker \alpha})^n$ ne s'annule pas ;
- (c) $d\alpha|_{\ker \alpha}$ est non-dégénérée en tout point, ie $d\alpha|_{\ker \alpha}$ est une *forme symplectique* en restriction à $\ker \alpha$.

3. On rappelle qu'une distribution \mathcal{D} sur une variété M est dite *intégrable* s'il existe, pour tout point p de M , une sous-variété N passant par p qui soit une *sous-variété intégrale* de la distribution, ie qui soit tangente en tout point à la distribution. Le théorème de Frobenius fournit une équivalence, pour une distribution \mathcal{D} , entre : la propriété (géométrique) d'intégrabilité, la propriété (algébrique) d'involutivité, et la seconde propriété géométrique (plus forte a priori) de posséder un feuilletage tangent à la distribution (on renvoie à [CLN85] pour la notion de feuilletages, nous utiliserons essentiellement dans ce texte le théorème de Frobenius ainsi que le résultat élémentaire suivant : l'ensemble des fibres d'un fibré $\pi: M \rightarrow B$ – et même plus généralement, l'ensemble des pré-images des feuilles d'un feuilletage de B – définit un feuilletage sur M). On déduit du théorème de Frobenius la caractérisation suivante de l'intégrabilité dans le cas de la codimension un (dont on peut trouver une preuve dans [SC97, p.81]) :

Proposition 1.1.10. (a) Une distribution \mathcal{D} d'hyperplans sur une variété M est intégrable si, et seulement si, pour tout point p de M , il existe un voisinage U de p , et une 1-forme α engendrant \mathcal{D} sur U , telle que $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$.

(b) Dans le cas particulier où la variété ambiante est de dimension trois, une distribution d'hyperplans \mathcal{D} est de contact si, et seulement si pour tout point p , et pour tout couple (X, Y) de champs de vecteurs engendrant \mathcal{D} localement au voisinage de p : $[X, Y](p) \notin \mathcal{D}$.

On déduit de ce résultat que si α est une forme de contact, alors le champ d'hyperplans engendré par α est non intégrable. Ceci explique que l'on dise parfois de façon équivalente, pour signifier qu'une distribution d'hyperplans est de contact, qu'elle est *maximalement non-intégrable*.

Une structure de contact \mathcal{D} étant fixée, la forme symplectique $d\alpha|_{\ker \alpha}$ définie localement par une 1-forme engendrant \mathcal{D} dépend évidemment de la 1-forme α choisie ; en revanche, on vérifie facilement grâce à la formule de Cartan sur la différentielle d'une 1-forme que les sous-espaces isotropes de l'espace symplectique ($\mathcal{D} = \ker \alpha, d\alpha|_{\ker \alpha}$) ne dépendent que de la structure de contact \mathcal{D} et pas de la 1-forme α . En effet, si X et Y sont deux champs de vecteurs à valeurs dans \mathcal{D} , alors $d\alpha(X, Y) = -\alpha([X, Y])$. Ceci permet de définir la notion d'isotropie associée à une structure de contact.

Définition 1.1.11. Soit \mathcal{D} une distribution de contact sur une variété M . Une sous-distribution E de \mathcal{D} est dite *isotrope* si en tout point p , $E(p)$ est un sous-espace isotrope de l'espace symplectique $(\mathcal{D}(p), d\alpha(p)|_{\mathcal{D}(p)})$ défini par une 1-forme α quelconque engendrant localement \mathcal{D} en p . Une sous-distribution E de \mathcal{D} est dite *legendrienne* si elle est isotrope de dimension moitié de celle de \mathcal{D} . Une sous-variété intégrale de \mathcal{D} est appelée sous-variété *isotrope*, et *legendrienne* si elle est de dimension moitié de celle de \mathcal{D} .

Remarques 1.1.12. 1. Une sous-distribution E d'une distribution de contact \mathcal{D} est isotrope si et seulement si pour tout couple de champs de vecteurs X et Y à valeurs dans E , $[X, Y]$ est à valeur dans \mathcal{D} .

2. Si M est de dimension trois, alors les distributions isotropes sont simplement les sous-distributions de rang un de la distribution de contact, et elles sont toutes legendriennes.

3. Les fibrés tangents des sous-variétés isotropes (respectivement legendriennes) sont isotropes (resp. legendriens). En revanche, la condition d'isotropie d'une distribution E est plus faible que la condition d'involutivité : $[X, Y]$ doit être à valeur dans \mathcal{D} mais pas nécessairement dans E ; une sous-distribution isotrope ou legendrienne d'une distribution de contact n'est donc pas nécessairement intégrable.

4. La dimension maximale d'un sous-espace isotrope d'un espace vectoriel symplectique étant la dimension moitié, on en déduit que les distributions legendriennes sont exactement les distributions isotropes de dimension maximale (voir [Gei08, Proposition 1.5.12]). En particulier, la dimension maximale d'une sous-variété intégrale à une distribution de contact est donc la dimension moitié, et les sous-variétés legendriennes sont donc également les sous-variétés intégrales de dimension maximale.

Exemple 1.1.13. — On appellera *structure de contact standard* sur \mathbb{R}^{2n+1} le champ d'hyperplans s'écrivant dans les coordonnées canoniques $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$:

$$\xi_{st} = \text{Vect}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial z}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} + x_n \frac{\partial}{\partial z}\right) = \ker(dz - \sum_{i=1}^n x_i dy_i).$$

On vérifie que $dz - \sum_{i=1}^n x_i dy_i$ est bien une forme de contact, de sorte que ξ_{st} est bien une distribution de contact.

- On a exhibé des coordonnées dans lesquelles la distribution de contact standard de la géométrie des EDO d'ordre 2 C s'envoie sur la structure de contact standard de \mathbb{R}^3 (avec le changement de coordonnées $x \rightarrow y, p \rightarrow x, y \rightarrow z$), ce qui montre que C est bien une structure de contact.

Les structures de contact, tout comme les structures symplectiques (et au contraire des métriques riemanniennes par exemple) sont des objets géométriques *non rigides*, ie sont toutes localement isomorphes. C'est ce qu'exprime le théorème de Darboux ci-dessous, dont on peut trouver une preuve dans [Gei08, Theorem 2.5.1 p.67].

Théorème 1.1.14 (Théorème de Darboux). *Soit ξ une structure de contact sur une variété M de dimension $2n + 1$. Pour tout point p de M , il existe une carte φ au voisinage de p qui envoie ξ sur la distribution de contact standard sur \mathbb{R}^{2n+1} , ie telle que $\varphi_*\xi = \xi_{st}$.*

1.1.3 Équivalence avec les structures lagrangiennes de contact

Nous avons vu apparaître naturellement au cours de l'étude de la géométrie des EDO d'ordre 2 deux distributions transverses dans la distribution de contact standard sur $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$. Ceci motive l'introduction d'un nouveau type de structure géométrique.

Définition 1.1.15. On appelle *structure lagrangienne de contact* sur une variété M^{2n+1} de dimension impaire la donnée de deux distributions E_1 et E_2 de dimension n et transverses, dont la somme $E_1 \oplus E_2$ est une distribution de contact sur M , et telles que E_1 et E_2 en soient des distributions legendriennes (ie $[E_i, E_i] \subset E_1 \oplus E_2$ pour $i = 1$ et 2).² En particulier en dimension 3, une distribution lagrangienne de contact est simplement la donnée de deux distributions transverses de dimension 1 dans une distribution de contact.

Exemple 1.1.16. Pour toute EDO d'ordre 2 de la forme (E) , le couple (E, V) formé par la distribution de rang 1 E définie par l'EDO et la distribution verticale V est une structure lagrangienne de contact sur $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$.

Dans le cas de la dimension trois, le théorème suivant dit qu'on peut faire un peu mieux que le théorème 1.1.14 lorsqu'on envoie localement une structure de contact sur une autre : on peut de plus contrôler une sous-distribution de rang 1 de la distribution de contact. Selon la littérature, ce résultat serait dû sous la forme ci-dessous à Bäckelund.

Théorème 1.1.17. *Soit ξ_1 et ξ_2 deux distributions de contacts sur des variétés M_1 et M_2 de dimension trois, et E_1 (respectivement E_2) une sous-distribution de ξ_1 (resp. ξ_2). Alors pour tous points p de M_1 et q de M_2 , il existe un difféomorphisme local d'un voisinage de p sur un voisinage de q envoyant (ξ_1, E_1) sur (ξ_2, E_2) .*

Ce théorème est donc un « théorème de Darboux » pour les structures définies par la donnée d'une distribution de contact en dimension 3 et d'une unique sous-distribution de rang 1 : elles sont toutes localement équivalentes ; en d'autres termes ces structures ne sont pas rigides. On peut cependant vérifier que cette non-rigidité est très subtile, car la donnée d'une distribution de contact ξ en dimension 3 et d'un champ de vecteurs X à valeur dans cette distribution définit en revanche une structure géométrique rigide (ie ces structures (ξ, X) ne sont pas toutes localement isomorphes).

Un énoncé équivalent du théorème 1.1.17 est le suivant : *tous les couples (C, E) , où E est une distribution de rang 1 transverse à V dans la distribution de contact standard sur $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$, sont équivalents* (en effet ce théorème est local, et on peut de plus grâce au théorème de Darboux 1.1.14 commencer par se ramener à la distribution de contact standard sur $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$). Notons qu'un difféomorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ établissant l'équivalence entre deux tels couples (C, E_1) et (C, E_2) ne préserve plus nécessairement la distribution verticale, donc la transformation à laquelle il donne lieu sur les EDO associées n'est pas une transformation de type graphe. On appelle *transformation de contact* une transformation entre EDO d'ordre 2 induite par une transformation des distributions associées qui préserve la distribution de contact standard. Avec ce nouveau type de transformations, le théorème 1.1.17 est équivalent à l'énoncé suivant : *toutes les EDO d'ordre 2 sont équivalentes à transformation de contact près*. C'est sous cette dernière forme que l'on peut trouver une démonstration du théorème 1.1.17 dans [Olv95, Theorem 11.11 p.356] (la démonstration est faite au cours des exemples 11.1, 11.3, 11.5, et 11.10 qui précèdent l'énoncé). Cette démonstration utilise

² Les distributions E_1 et E_2 sont alors des distributions legendriennes de la distribution de contact $E_1 \oplus E_2$, ce qui rend relativement malheureux le choix du nom « structures lagrangiennes de contact » pour ces nouvelles structures géométriques, qu'on aurait pu appeler *legendriennes* de contact.

la méthode générale développée par Cartan et appelée *méthode d'équivalence de Cartan*, pour résoudre les « problèmes d'équivalences », c'est à dire pour déterminer si deux systèmes d'équations déterminés par des formes différentielles sont équivalents. Selon la littérature, il semblerait que l'équivalence des EDO d'ordre 2 à transformations de contact près ait déjà été démontré par Sophus Lie.

Pour toute structure lagrangienne de contact (E_1, E_2) sur une variété M de dimension trois, il existe selon le théorème 1.1.17 en tout point un difféomorphisme local ϕ tel que $\phi_*(E_1 \oplus E_2) = C$ et $\phi_*E_2 = V$, et on peut donc localement associer à (E_1, E_2) une distribution $E = \phi_*(E_1)$ de rang 1 contenue dans C et transverse à V , ie une EDO d'ordre 2. Géométriquement, cela consiste à voir M localement comme un fibré sur un espace local de feuilles de E_2 , dont les fibres sont les feuilles de E_2 , puis à projeter les feuilles de E_1 sur la base de ce fibré. Le théorème 1.1.17 dit alors que les courbes obtenues sont les solutions d'une EDO d'ordre 2. De plus selon le lemme 1.1.5, si $\tilde{\phi}$ est un autre difféomorphisme local effectuant cette même équivalence entre $(E_1 \oplus E_2, E_2)$ et (C, V) , et si on note $\tilde{E} = \tilde{\phi}_*(E_1)$, alors $\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$ est une transformation de type graphe envoyant l'EDO d'ordre 2 associée à \tilde{E} sur celle associée à E . On a donc finalement prouvé la correspondance suivante :

$$\begin{array}{ccc} \text{EDO d'ordre 2 de la forme } (E) & & \text{structures lagrangiennes de contact} \\ \text{modulo transformations locales de type} & \longleftrightarrow & \text{modulo isomorphismes locaux.} \\ \text{graphe} & & \end{array}$$

Les structures lagrangiennes de contact sont donc les objets géométriques recherchés, dont la classification locale est équivalente à la classification locale des EDO d'ordre 2 modulo transformations de type graphe.

1.2 Géométrie de l'espace modèle

Nous avons mis en évidence sur $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ une structure lagrangienne de contact canonique (E, V) , où E est la distribution de rang 1 associée à l'EDO linéaire $y'' = 0$, et où V est la distribution verticale. Ceci amène à chercher comme espace modèle de la géométrie lagrangienne de contact un espace homogène dont $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}^2)$ est un ouvert. L'objectif de cette section est de décrire cet espace homogène ainsi que sa structure lagrangienne de contact canonique de différentes manières, et d'étudier quelques aspects de sa géométrie que nous utiliserons par la suite. Le théorème 1.4.1 affirmera que cet espace homogène est « le bon », c'est à dire que toute structure lagrangienne de contact sur une variété est une « version courbe infinitésimale » de cet espace.

1.2.1 $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2)$ et sa structure lagrangienne de contact canonique

Différentes descriptions

Définition 1.2.1. Nous notons $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2)$ le projectivisé du fibré tangent à $\mathbb{R}P^2 = \{p \mid p \text{ droite vectorielle de } \mathbb{R}^3\}$, et nous notons (p, l) , avec l une direction tangente en $p \in \mathbb{R}P^2$, les points de $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2)$. Nous notons enfin $\pi: \mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2) \rightarrow \mathbb{R}P^2$ la projection canonique.

L'espace homogène que nous considérons est $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2)$. Notons qu'en particulier, $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2)$ a le bon goût d'être compact. Nous donnons dès maintenant une première description alternative de cet espace : $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2)$ s'identifie à l'espace des droites projectives pointées de $\mathbb{R}P^2$. Une *droite projective* est l'image dans $\mathbb{R}P^2$ d'un plan vectoriel de \mathbb{R}^3 , et si l'on fixe un point p dans $\mathbb{R}P^2$ et une direction l tangente à p , on vérifie en effet facilement qu'il existe une unique droite projective passant par p et tangente à l (en utilisant une paramétrisation des droites projectives par exemple). On peut également voir l'espace des droites projectives pointées comme l'espace des drapeaux $l \subset P \subset \mathbb{R}^3$, avec l une droite vectorielle et P un plan vectoriel. On identifiera à partir de maintenant sans le préciser ces trois descriptions géométriques de $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2)$. On notera par ailleurs (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Rappelons que le groupe $\text{PGL}(3, \mathbb{R}) = \text{GL}(3, \mathbb{R}) / \mathbb{R}^*id$ agit naturellement sur $\mathbb{R}P^2$, par une action telle que la projection canonique $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ est équivariante pour le morphisme canonique $\text{GL}(3, \mathbb{R}) \rightarrow \text{PGL}(3, \mathbb{R})$. Le groupe de transformations naturel qui agit sur $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2)$ est donc le groupe $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ des transformations projectives de $\mathbb{R}P^2$ agissant par leurs différentielles, et en identifiant $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2)$ à l'espace des droites projectives pointées ou à l'espace des drapeaux comme on l'a vu ci-dessus, cette action devient simplement l'action naturelle de $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ sur les droites projectives pointées (respectivement sur les drapeaux). Le point de vue des drapeaux permet de voir directement que l'action de $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ est transitive : cela revient simplement à appliquer le théorème de la base incomplète. Ce point de vue permet également

d'identifier facilement le stabilisateur du point-base $o = (\mathbb{R}e_1, Vect(e_1, e_2))$: c'est le sous-groupe que nous noterons à partir de maintenant P_{min} associé aux matrices triangulaires supérieures :

$$P_{min} = Stab_{\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})}(o) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.2.1)$$

Nous pouvons maintenant donner de $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$ la description qui lui manquait pour être un espace homogène à part entière : l'application orbitale de l'action de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ en o induit un difféomorphisme équivariant entre $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$ et le quotient $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})/P_{min}$.³

Notation 1.2.2 (descriptions de l'espace modèle $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$). Puisqu'on est en dimension impaire, le morphisme injectif $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ est surjectif, et la projection $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}(3, \mathbb{R})$ est injective, de sorte que les groupes $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ et $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ sont finalement isomorphes, et on s'autorisera dorénavant à les identifier sans le préciser. On identifiera également à partir de maintenant les différentes descriptions de l'espace modèle que nous avons vues :

- les descriptions géométriques, avec lesquelles on utilisera le groupe $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ comme représentation naturelle du groupe homogène de transformations, et on notera alors (p, l) un point générique de $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$, avec $p \in \mathbb{R}P^2$ et l une droite projective passant par p , et $[A]$ la classe d'une matrice $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$;
- la description algébrique $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/P_{min}$, pour laquelle on utilisera le groupe $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ comme représentation naturelle du groupe homogène de transformations, et on notera alors $[g]$ la classe d'un élément $g \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/P_{min}$.

Des cercles α et β à la structure lagrangienne de contact canonique Nous allons maintenant décrire la structure lagrangienne de contact canonique de $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$, et nous commençons pour cela par mettre en évidence deux feuilletages de dimension 1 sur $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$, naturellement définis par la description géométrique de $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$ comme espace des droites projectives pointées de $\mathbb{R}P^2$; nous garderons donc ce point de vue au sein de ce paragraphe, et nous noterons (p, l) un point générique de $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$, où $p \in \mathbb{R}P^2$ et l est une droite projective passant par p .

Définition 1.2.3. Par un point (p, l) de $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$ passent deux courbes privilégiées par la géométrie de $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$:

- la première correspond à la variation du point p sur la droite projective l , et sera appelée *cercle α passant par (p, l)* , et notée $C_\alpha(p, l)$;
- la seconde correspond à la variation de la droite projective l passant par le point p , et sera appelée *cercle β passant par (p, l)* , et notée $C_\beta(p, l)$.

Nous faisons quelques remarques naïves mais néanmoins utiles sur ces cercles naturels.

Remarques 1.2.4. 1. Les cercles α et β sont des sous-variétés difféomorphes à $\mathbb{R}P^1$. En effet les premiers sont les fibres de la projection $(p, l) \in \mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2) \rightarrow l$ et les seconds celles de la projection π . Ceci nous montre de plus qu'ils définissent l'un et l'autre des feuilletages de dimension 1 de $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$.

2. Un cercle α $C_\alpha(p, l)$ ne dépend que de la droite projective l , ce qui permet de définir le cercle α passant par l comme $C_\alpha(l) = C_\alpha(p, l)$ (de façon équivalente : une droite projective l se relève d'une unique façon en un cercle α se projetant par π sur l). Inversement, un cercle β $C_\beta(p, l)$ ne dépend que du point p , ce qui permet de définir le cercle β passant par p par $C_\beta(p) = C_\beta(p, l)$.

3. Il est clair qu'une transformation projective $g \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ préserve ces feuilletages, ie envoie le cercle α (respectivement β) passant par (p, l) sur le cercle α (resp. β) passant par $g(p, l)$. Puisque les transformations projectives agissent transitivement sur $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$, on en déduit en particulier qu'elles agissent transitivement sur l'ensemble des cercles α , et sur l'ensemble des cercles β . Les stabilisateurs des cercles α (respectivement β) sont donc tous conjugués dans $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$.

Nous faisons désormais un bref rappel sur les cartes affines de $\mathbb{R}P^2$ et le lien qu'elles font avec la géométrie affine, qui nous servira fréquemment.

3. Rappelons que si X et Y sont deux ensembles munis respectivement d'actions de groupes G et H , et si $\varphi: G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes, une application $f: X \rightarrow Y$ est dite *équivariante pour φ* ou *φ -équivariante* si pour tout $x \in X$ et pour tout $g \in G$: $f(g \cdot x) = \varphi(g) \cdot f(x)$.

Remarque 1.2.5 (Cartes affines). Une droite projective D_∞ définit naturellement une carte de $\mathbb{R}P^2$ de la manière suivante : en considérant un plan affine $P \subset \mathbb{R}^3$ parallèle à D_∞ , l'intersection des droites de \mathbb{R}^3 avec P définit un difféomorphisme entre $\mathbb{R}P^2 \setminus D_\infty$ et le plan P , qui est la *carte affine associée* à D_∞ (les cartes définies par deux plans affines parallèles à D_∞ diffèrent d'une homothétie). Les cartes affines font le lien entre la géométrie projective et la géométrie affine, par exemple elles conjuguent les transformations projectives de $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ qui fixent D_∞ à des transformations affines de P . Si $D_\infty = \text{Vect}(e_1, e_2)$ par exemple, on adoptera la notation suivante pour les transformations projectives qui fixent D_∞ :

$$\begin{bmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A + [v], \quad (1.2.2)$$

de sorte que l'ensemble de ces transformations s'identifie au groupe $\text{Aff}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \rtimes \text{GL}(2, \mathbb{R})$ des transformations affines de \mathbb{R}^2 .

Le stabilisateur du cercle α passant par le point-base $o = (\mathbb{R}e_1, \text{Vect}(e_1, e_2))$ est l'ensemble des transformations projectives stabilisant la droite projective $D_\infty = \text{Vect}(e_1, e_2)$, ie est :

$$\text{Stab}_{\text{PGL}(3, \mathbb{R})}(C_\alpha(o)) = \{A + [v] \mid A \in \text{GL}(2, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^2\} \simeq \text{Aff}(\mathbb{R}^2), \quad (1.2.3)$$

et agit transitivement sur $C_\alpha(o)$. Le noyau de l'action de $\text{Stab}_{\text{PGL}(3, \mathbb{R})}(C_\alpha(o))$ sur $C_\alpha(o)$ est $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}^{*2}$, et on a donc une action fidèle transitive de $\text{Aff}(\mathbb{R}^2)/(\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}^{*2}) \simeq \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ sur $C_\alpha(o)$. De même, on montre qu'on a une action fidèle transitive naturelle de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ sur le cercle β passant par o .

On considère maintenant les distributions définies par les feuilletages en cercles α et β .

Définition 1.2.6. On note E^α et E^β les distributions de dimension 1 définies par les feuilletages en cercles α et β , et on appelle (E^α, E^β) la *structure lagrangienne de contact canonique* sur $\mathbb{P}(\text{TR}P^2)$.

Nous vérifierons au paragraphe suivant que $E^\alpha \oplus E^\beta$ est bien une structure de contact.

Remarques 1.2.7. 1. Pour toute droite projective D_∞ de $\mathbb{R}P^2$, le complémentaire de D_∞ s'identifie naturellement par une carte affine à \mathbb{R}^2 (voir la remarque 1.2.5), qui apparait de cette façon comme un ouvert naturel de $\mathbb{R}P^2$. Par une telle inclusion de \mathbb{R}^2 dans $\mathbb{R}P^2$, les distributions E et V de la structure lagrangienne de contact standard de la géométrie des EDO d'ordre 2 sur $\mathbb{P}(\text{TR}^2)$ sont les restrictions respectives à $\mathbb{P}(\text{TR}^2)$ des distributions E^α et E^β que nous venons de définir.

2. Puisque les feuilletages en cercles α et β sont préservés par l'action de $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$, la structure lagrangienne de contact canonique sur $\mathbb{P}(\text{TR}P^2)$ est évidemment $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ -invariante.

Origine algébrique de la structure lagrangienne de contact canonique Nous allons maintenant montrer que la structure lagrangienne de contact (E^α, E^β) que nous venons de décrire géométriquement apparaît purement algébriquement à partir de la description de $\mathbb{P}(\text{TR}P^2)$ comme le quotient $\text{SL}(3, \mathbb{R})/P_{\min}$.

Soit \mathfrak{sl}_3 et \mathfrak{p}_{\min} les algèbres de Lie respectives de $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ et de P_{\min} . Nous noterons \bar{v} la classe d'un vecteur v de \mathfrak{sl}_3 dans $\mathfrak{sl}_3/\mathfrak{p}_{\min}$. Le quotient $\mathfrak{sl}_3/\mathfrak{p}_{\min}$ est canoniquement identifié à l'espace tangent de $\text{SL}(3, \mathbb{R})/P_{\min}$ au point base $[id]$, et on considère la base de $\mathfrak{sl}_3/\mathfrak{p}_{\min}$ définie par la classe des trois éléments suivants de \mathfrak{sl}_3 :

$$e_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que les directions $\mathbb{R}e_\alpha^-$ et $\mathbb{R}e_\beta^-$ sont invariantes par l'action adjointe de P_{\min} sur $\mathfrak{sl}_3/\mathfrak{p}_{\min}$. Elles définissent donc deux distributions de rang un $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ -invariantes sur $\text{SL}(3, \mathbb{R})/P_{\min}$, que nous noterons E^α et E^β : $E^\alpha([g]) = D_e L_g(\mathbb{R}e_\alpha^-)$ et $E^\beta([g]) = D_e L_g(\mathbb{R}e_\beta^-)$.

Lemme 1.2.8. *Le champ d'hyperplans $E^\alpha \oplus E^\beta$ est une distribution de contact, et la structure lagrangienne de contact (E^α, E^β) ainsi définie sur $\text{SL}(3, \mathbb{R})/P_{\min}$ s'identifie par l'application orbitale à la structure lagrangienne de contact canonique sur $\mathbb{P}(\text{TR}P^2)$ définie précédemment.*

Démonstration. Il existe une sous-variété T de dimension trois de $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ transverse à P_{\min} et passant par id , telle que la projection $\pi: \text{SL}(3, \mathbb{R}) \rightarrow \text{SL}(3, \mathbb{R})/P_{\min}$ induise un difféomorphisme de T sur un voisinage ouvert U de $[id]$. Les champs de vecteurs définis pour $g \in T$ par : $X([g]) = D_g \pi(\tilde{e}_\alpha(g))$ et $Y([g]) = D_g \pi(\tilde{e}_\beta(g))$, en notant \tilde{e}_α et \tilde{e}_β les champs invariants à gauche sur $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ définis par e_α et e_β ,

forment alors un repère local de la distribution (E^α, E^β) en $[id]$. Puisque les champs X (respectivement Y) et \tilde{e}_α (resp. \tilde{e}_β) sont π -associés, le crochet de Lie de X et Y est π -associé à $[\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\beta]$, d'où pour tout $g \in T$: $[X, Y]([g]) = D_g\pi([\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\beta](g)) = D_g\pi(\widetilde{[e_\alpha, e_\beta]}(g))$, or le crochet de Lie de e_α et e_β est égal à $-e_0$, donc finalement $[X, Y]([g]) = D_g\pi(-\tilde{e}_0(g)) \notin (E^\alpha \oplus E^\beta)([g])$, et selon la caractérisation 1.1.10 des distributions de contact en dimension trois, $E^\alpha \oplus E^\beta$ est donc bien une distribution de contact.

On vérifie facilement que la courbe $(\exp(te_\alpha) \cdot o)_t$ (respectivement $(\exp(te_\beta) \cdot o)_t$) est une paramétrisation du cercle α (resp. β) passant par o , ce qui montre l'identification annoncée entre la description géométrique et la description algébrique de la structure lagrangienne de contact. \square

Nous appellerons *structure lagrangienne de contact canonique sur $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/P_{min}$* la structure que nous venons de mettre en évidence, et nous identifierons à partir de maintenant les structures canoniques sur le modèle géométrique et le modèle algébrique de $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$ (en particulier, nous les noterons de la même façon).

Nous terminons ce paragraphe en montrant que les isomorphismes locaux de la structure lagrangienne de contact canonique sur $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$ sont exactement les transformations projectives (ce phénomène est typique des structures géométriques rigides). Non seulement la structure lagrangienne de contact canonique de $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$ est une structure géométrique naturelle sur $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$ comme on vient de le voir avec le point de vue algébrique, et est invariante par $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$, mais à posteriori, le lemme ci-dessous montre que cette structure est « la bonne » structure géométrique sur $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$ vu comme espace homogène sous l'action de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$, puisque c'est celle dont les symétries sont exactement celles de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$.⁴

Lemme 1.2.9. *Un difféomorphisme local φ entre ouverts de $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$ qui préserve la structure lagrangienne de contact canonique de $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$ est la restriction de l'action d'un élément de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Tout d'abord, un tel difféomorphisme (respectivement local) ϕ préserve en particulier la distribution de contact $E^\alpha \oplus E^\beta$ et la distribution de rang 1 E^β , donc selon le lemme 1.1.5 ϕ est la prolongation d'un difféomorphisme (resp. local) φ de $\mathbb{R}P^2$ (la preuve est la même que dans le cas de $\mathbb{P}(\mathrm{TR}^2)$). Supposons d'abord que ϕ est un difféomorphisme global. On sait alors que le difféomorphisme φ de $\mathbb{R}P^2$ dont il est la prolongation envoie droite projective sur droite projective (car ϕ préserve le feuilletage en cercles α), donc selon le résultat ci-dessous de géométrie projective, on en déduit bien que ϕ correspond à l'action d'un élément de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ (ce résultat est prouvé dans [Sam86, Théorème 7 p.32] –il faut également vérifier que le seul isomorphisme de corps de \mathbb{R} est l'identité, en effet un tel isomorphisme vaut l'identité sur \mathbb{Q} , or on montre qu'un isomorphisme de corps de \mathbb{R} est continu–).

Fait. Soit f une bijection entre deux espaces projectifs réels $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(V')$ de même dimension au moins égale à 2. Si f préserve l'alignement des points (ie la propriété, pour un couple de points, d'appartenir à la même droite projective), alors f est une transformation projective associée à un isomorphisme φ de V sur V' .

Si ϕ est un difféomorphisme local, on ne peut plus utiliser le résultat ci-dessus spécifique à la géométrie projective, et nous allons devoir faire un léger anachronisme et utiliser des résultats qui seront énoncés dans le paragraphe suivant. On souhaiterait utiliser la proposition 1.3.24 qui caractérise parmi les difféomorphismes locaux de l'espace modèle $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$, ceux qui viennent du groupe $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$, à l'aide de la géométrie de Cartan plate modèle sur $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$. Pour cela, il nous suffit de savoir qu'un isomorphisme de la structure lagrangienne de contact du modèle est un isomorphisme de la structure de Cartan qui lui est associée, or c'est le cas selon le théorème 1.4. \square

La fin de cette preuve, même si elle ne prendra tout son sens qu'après la lecture du paragraphe 1.3.2 sur les géométries de Cartan, a le mérite de donner un exemple des informations géométriques profondes fournies par les géométries de Cartan, qui nous ont ici permis de faire le lien entre une structure géométrique différentielle, ie infinitésimale, la structure lagrangienne de contact canonique sur $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$, et une structure géométrique globale, la géométrie projective de $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$.

4. Il est impossible, à cette occasion, de ne pas mentionner Félix Klein et son « programme d'Erlangen », à qui on doit ce point de vue moderne à la fois très général et très intuitif sur la géométrie : étudier la géométrie d'un espace homogène X sous l'action d'un groupe G consiste à étudier les propriétés de X invariantes par G . Puisque la structure géométrique différentielle que nous avons mis en évidence sur $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$ caractérise le groupe de symétries $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$, elle est la structure « la plus adaptée » à la géométrie de $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$ vu comme espace homogène sous l'action de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ que l'on puisse espérer trouver. Voir l'introduction de la section 1.3 pour plus de détails sur ce point de vue géométrique dû à Félix Klein, et pour voir deux exemples de structures géométriques générales qui s'inscrivent dans ce point de vue.

1.2.2 Deux types d'ouverts homogènes particuliers

Nous allons maintenant mettre en évidence deux types particuliers d'ouverts de $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$. Nous introduisons tout d'abord de nouveaux objets géométriques naturels sur le modèle $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$.

Surfaces α et β

Définition 1.2.10. Par un point x de $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$ passent deux surfaces compactes connexes privilégiées par la géométrie de $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$:

- l'union des cercles β intersectant le cercle α passant par x , que nous appellerons *surface α - β passant par x* et noterons $S_{\alpha,\beta}(x)$;
- l'union des cercles α intersectant le cercle β passant par x , que nous appellerons *surface β - α passant par x* et noterons $S_{\beta,\alpha}(x)$.

Quelque remarques s'imposent, aussi naïves et utiles que celles concernant les cercles du même nom, mis à part la troisième.

Remarques 1.2.11. 1. La surface α - β passant par un point (p, l) est l'image réciproque de la sous-variété l de dimension 1 de $\mathbb{R}P^2$ par la projection $\pi: \mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2) \rightarrow \mathbb{R}P^2$, ce qui assure que $S_{\alpha,\beta}(p, l)$ est bien une sous-variété compacte connexe de dimension 2 de $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$. De plus $S_{\alpha,\beta}(p, l)$ ne dépend que de l , nous noterons donc parfois $S_{\alpha,\beta}(l) = S_{\alpha,\beta}(p, l)$. La projection des cercles β intersectant $C_\alpha(l)$ sur $C_\alpha(l)$ permet de voir $S_{\alpha,\beta}(l)$ comme l'espace total d'un fibré naturel en cercles S^1 sur $C_\alpha(l)$.

De la même façon, $S_{\beta,\alpha}(p, l)$ est l'image réciproque par la projection $(p, l) \rightarrow l$ de $\{l' \mid l' \ni p\}$, ne dépend que de p et sera donc parfois notée $S_{\beta,\alpha}(p) = S_{\beta,\alpha}(p, l)$, et est l'espace total d'un fibré en cercles S^1 sur $C_\beta(p)$.

2. Une transformation de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ envoie toute surface α - β (resp. β - α) sur une surface α - β (resp. β - α).
3. Les cercles α ou β définissent en particulier des feuilletages de dimension 1 sur les surfaces α - β et β - α , de sorte qu'elles sont de genre 1 et donc homéomorphes à un tore si elles sont orientables, et une bouteille de Klein sinon, selon la classification des surfaces compactes connexes.

Lemme 1.2.12. Les surfaces α - β et β - α sont homéomorphes à des bouteilles de Klein.

Démonstration. Nous le prouvons uniquement pour les surfaces α - β , l'argument étant le même pour les surfaces β - α . De plus il suffit par $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ -invariance de le prouver pour la surface α - β passant par le point base $o = (\mathbb{R}e_1, \mathrm{Vect}(e_1, e_2))$, que nous noterons S . On sait qu'une variété M est orientable si et seulement si l'orientation est préservée le long de tout lacet au sens suivant : si $\gamma: [0; 1] \rightarrow M$ est un lacet de M basé en p , pour toute orientation ε^p de T_pM , il existe un unique choix continu $(\varepsilon_t^p)_t$ d'orientations le long de γ , et on dit que γ *préserve l'orientation* si pour toute orientation ε^p , $\varepsilon_0^p = \varepsilon_1^p$. Un paramétrage du cercle α passant par o définit une orientation de $C_\alpha(o)$, qui est caractérisée par une orientation de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. On choisit un paramétrage γ de $C_\alpha(o)$ définissant l'orientation associée à la base ordonnée (e_1, e_2) . Le choix d'une orientation du cercle β passant par o suffit donc maintenant pour définir une orientation de S , or une orientation de $C_\beta(o)$ est à son tour définie par une orientation de $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. On choisit finalement pour $C_\beta(o)$ l'orientation définie par la base ordonnée (e_2, e_3) , et on note ε^o l'orientation de S ainsi définie. On vérifie facilement qu'une orientation continue $(\varepsilon_t^o)_t$ de S le long de γ partant de ε^o en $t = 0$ correspond en $t = 1$ à l'orientation définie par l'orientation de $C_\alpha(o)$ correspondant au paramétrage γ d'une part, et à celle de $C_\beta(o)$ correspondant à la base ordonnée $(-e_2, e_3)$ de $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ d'autre part. Donc γ ne préserve pas l'orientation, et S n'est donc pas orientable, ce qui termine la preuve du lemme. \square

Ouverts de type Ω Pour $D_\infty \subset \mathbb{R}P^2$ une droite projective, on appelle Ω l'ouvert obtenu en retirant à $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$ la surface α - β passant par D_∞ . Puisque l'action de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ sur les droites projectives de $\mathbb{R}P^2$ est transitive, on peut choisir une droite projective particulière, quitte à translater par une transformation projective ; nous considérerons donc pour fixer les idées que D_∞ est la droite projective définie par $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

L'ouvert $\mathbb{R}P^2 \setminus D_\infty$ s'identifie alors canoniquement à \mathbb{R}^2 par la carte affine définie par D_∞ , et la restriction de la projection $\pi: \mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2) \rightarrow \mathbb{R}P^2$ à Ω s'identifie à la projection $\pi: \mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$. En d'autres termes, Ω est l'ensemble $\{(x, D) \mid x \in D \subset \mathbb{R}^2\}$ des droites affines pointées de \mathbb{R}^2 .

Le stabilisateur dans $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ de Ω est égal au stabilisateur de la droite projective à l'infini D_∞

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})}(\Omega) = \mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})}(D_\infty) \equiv \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2),$$

il s'identifie donc au groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ (voir la remarque 1.2.5 au sujet des cartes affines du complémentaire d'une droite projective), et agit transitivement sur Ω .

Nous souhaitons maintenant retirer à Ω une surface $S_{\beta, \alpha}(x)$, pour x un point de $\mathbb{R}P^2$. Deux situations se présentent selon la position du point $x \in \mathbb{R}P^2$, qui sont différentes du point de vue de la géométrie de $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$, ie qui ne sont *pas équivalentes* à action près de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$.

Ouverts de type Ω_1 Le premier cas est celui où le point appartient à la droite projective à l'infini définissant $\Omega : x \in D_\infty$. Puisque l'action de $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})}(\Omega) = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ sur D_∞ est transitive, $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des couples $(S_{\alpha, \beta}(D_\infty), S_{\beta, \alpha}(x))$ du premier type, ie pour lesquels x appartient à la droite projective D_∞ . On peut donc sans perte de généralité tout d'abord fixer la droite projective $D_\infty = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, puis fixer le point $x_1 = \mathbb{R}e_1 \in D_\infty$.

Une droite projective passant par x_1 correspond à une droite affine de \mathbb{R}^2 parallèle à $\mathbb{R}e_1$, donc la surface $S_{\beta, \alpha}(x_1)$ est l'ensemble des droites affines pointées parallèles à $\mathbb{R}e_1$. L'ouvert obtenu en retirant à Ω la surface $S_{\beta, \alpha}(x_1)$ sera appelé *ouvert Ω_1 standard* :

$$\Omega_1 := \Omega \setminus S_{\beta, \alpha}(x_1) = \{(x, D) \mid x \in D \subset \mathbb{R}^2, D \not\parallel \mathbb{R}e_1\}.$$

Tout ouvert obtenu en retirant à $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$ un couple de surfaces $(S_{\alpha, \beta}(D_\infty), S_{\beta, \alpha}(x_2))$ du premier type ($x_1 \in D_\infty$) sera appelé *ouvert de type Ω_1* , et $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des ouverts de type Ω_1 (car il agit transitivement sur l'ensemble des couples $\{(D_\infty, x_1) \mid x_1 \in D_\infty\}$).

On note G_1 le stabilisateur dans $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ de Ω_1 :

$$G_1 := \mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})}(\Omega_1) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \lambda & x \\ 0 & \mu \end{array} \right) + \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \mid \lambda\mu \neq 0 \right\},$$

que l'on identifiera au produit semi-direct $\mathbb{R}^{*2} \rtimes \mathrm{Heis}(3)$ du groupe de Heisenberg $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}^3 \right\}$ par \mathbb{R}^{*2} . On choisira lorsqu'il le faudra comme point-base de Ω_1 le point $o_1 := ((0, 0), \mathbb{R}e_2)$ dont le stabilisateur dans G_1 est le sous-groupe $\mathbb{R}^{*2} \times \{id\}$.

Le stabilisateur de Ω_1 contient un sous-groupe isomorphe à $\mathrm{Heis}(3)$:

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & x \\ 0 & 1 \end{array} \right) + \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \right\} < \mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})}(\Omega_1)$$

dont on vérifie qu'il agit *simplement transitivement* sur Ω_1 . En effet, le sous-groupe $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur les droites vectorielles différentes de $\mathbb{R}e_1$, et les translations du facteur \mathbb{R}^2 agissent transitivement sur les points sans changer la direction de la droite affine ; par ailleurs le calcul du stabilisateur de o_1 ci-dessus nous assure que l'action de ce sous-groupe est libre.

En particulier, soulignons qu'une conséquence importante de cette action simplement transitive est que Ω_1 est difféomorphe à \mathbb{R}^3 , donc en particulier simplement connexe.

Ouverts de type Ω_2 Le second cas est celui où le point n'appartient pas à la droite projective : $x \notin D_\infty$. Puisque l'action de $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})}(\Omega) = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ sur $\mathbb{R}P^2 \setminus D_\infty \equiv \mathbb{R}^2$ est transitive, comme pour le cas des ouverts Ω_1 on en déduit que $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des couples $(S_{\alpha, \beta}(D_\infty), S_{\beta, \alpha}(x))$ du second type, ie pour lesquels x n'appartient pas à la droite projective D_∞ . On peut donc sans perte de généralité tout d'abord fixer la droite projective $D_\infty = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, puis en identifiant canoniquement $\mathbb{R}P^2 \setminus D_\infty$ à \mathbb{R}^2 , on peut fixer le point $x_2 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

L'intersection de la surface $S_{\beta, \alpha}(x_2)$ avec Ω est l'ensemble des droites affines pointées passant par $(0, 0)$. L'ouvert obtenu en retirant à Ω la surface $S_{\beta, \alpha}(x_2)$ sera appelé *ouvert Ω_2 standard* :

$$\Omega_2 := \Omega \setminus S_{\beta, \alpha}(x_2) = \{(x, D) \mid x \in D \subset \mathbb{R}^2, (0, 0) \notin D\}.$$

Tout ouvert obtenu en retirant à $\mathbb{P}(\mathrm{TR}P^2)$ un couple de surfaces $(S_{\alpha, \beta}(D_\infty), S_{\beta, \alpha}(x_2))$ du second type ($x_2 \notin D_\infty$) sera appelé *ouvert de type Ω_2* , et $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des ouverts de type Ω_2 (car il agit transitivement sur l'ensemble des couples $\{(D_\infty, x_2) \mid x_2 \notin D_\infty\}$).

On note G_2 le stabilisateur dans $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ de Ω_2 :

$$G_2 := \mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})}(\Omega_2) = \left\{ \left[\begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \mid A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \right\},$$

que l'on identifiera à $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. On choisira lorsque l'on en aura besoin comme point-base de Ω_2 le point $o_2 := ((1, 0), \mathbb{R}e_2 + (1, 0))$, dont le stabilisateur dans G_2 est le sous-groupe

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{array} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

En particulier le sous-groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur Ω_2 , qui est donc difféomorphe au tore plein ouvert $\mathbb{R} \times D^2$.

1.3 (G, X) -structures et géométries de Cartan

Nous allons maintenant présenter les deux outils géométriques principaux que nous utiliserons au cours de ce mémoire : les (G, X) -structures et les géométries de Cartan, ainsi que les résultats dont nous aurons besoin par la suite à leur sujet. Ces deux types de structures fournissent un cadre adapté à un même point de vue géométrique, dû à l'origine à Félix Klein dans son célèbre « programme d'Erlangen ». Le point de vue moderne sur la géométrie qu'a initié Félix Klein est le suivant : étudier la géométrie d'un espace X n'est rien d'autre qu'étudier les propriétés de cet espace invariées par un certain groupe homogène de transformations G . On appellera la donnée d'un tel couple une *géométrie de Klein* (ou simplement un *espace homogène*) (G, X) .⁵

Par exemple, on peut s'intéresser sur l'espace euclidien \mathbb{R}^n aussi bien à sa structure affine, qu'à sa structure euclidienne, sa structure symplectique ... et on a l'habitude de caractériser ces structures par des objets différentiels (en l'occurrence par des tenseurs pour les trois structures nommées), puis de déterminer les groupes de transformations qui préservent ces objets. Mais on peut également inverser notre point de vue et les caractériser à l'origine par les groupes de transformations que l'on considère : $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^n)$, puis partir à la recherche des objets géométriques invariants par le groupe de transformations choisi. Il est ainsi possible d'étudier en détail les géométries de tout espace homogène, en profitant du cadre très intuitif et élégant fourni par les actions de groupes.

Lorsqu'on étudie la géométrie d'un espace homogène à travers un objet tensoriel, par exemple dans le cas de la géométrie euclidienne simplement une norme euclidienne sur \mathbb{R}^n , l'intérêt est qu'il est assez simple⁶ de trouver une généralisation formelle de cet objet sur une variété quelconque. Dans le cas de la géométrie euclidienne, on applique par exemple simplement la géométrie du modèle dans chaque « approximation linéaire » de la variété, ce qui donne la notion de métrique riemannienne. L'inconvénient est que l'on perd le rapport naturel à l'espace modèle. À la suite du programme d'Erlangen de Félix Klein, de nombreux travaux ont cherché un cadre géométrique permettant de généraliser la géométrie des espaces modèles, en lui donnant un sens sur des variétés quelconques, et tout en gardant un lien direct avec l'espace modèle.

On cherche donc à définir sur les variétés des structures géométriques « modelées sur » l'espace homogène (G, X) étudié en un sens à définir, et avec lesquelles le principe général suivant, s'inscrivant dans la continuité du point de vue initié par Klein, s'applique : *tout objet géométrique sur le modèle X qui est préservé par le groupe de transformations G fait sens sur la variété*. La difficulté rencontrée avec ce changement de point de vue est de définir les bonnes généralisations.

Les deux types de structures géométriques que nous présentons maintenant sont deux exemples de généralisation. Le premier type de structures est assez naturel et correspond aux géométries *localement modelées* sur le modèle, et on appelle assez logiquement les structures ainsi modelées sur l'espace homogène (G, X) les (G, X) -structures. Le second type de structures englobe le premier et est plus difficile à définir. Il consiste formellement à modeler de manière *infinitésimale* la structure sur le modèle, c'est à dire qu'elle se définit au niveau des espaces tangents. Une autre manière imagée de les définir par analogie avec les

5. Supposer que l'action du groupe est homogène signifie que tous les points de l'espace X sont équivalents du point de vue de cette géométrie, de sorte qu'il y a un sens à étudier la géométrie « globale » de l'espace X sous l'action de G , car les propriétés de X pour cette géométrie sont indépendantes du point au voisinage duquel on les étudie. Concrètement, toute action de groupe sur un espace donne lieu à autant d'espaces homogènes, et donc autant de géométries kleiniennes, que l'action a d'orbites.

6. À l'aide du langage moderne des tenseurs, qui est le fruit d'une longue succession de travaux ... Donc cela n'est simple qu'en apparence!

géométries riemanniennes non plates est de dire que ce sont des *versions courbes* de l'espace homogène initial ; cette analogie se révélera tout à fait adaptée à la situation, puisque nous définirons un tenseur de courbure associé à ces structures dont l'annulation sera justement équivalente à être localement isomorphe au modèle (ie à être une (G, X) -structure). Ceci étant, ces deux manières imaginées de les décrire n'aide pas pour l'instant à mieux visualiser ces nouvelles structures, et un problème bien posé valant mieux qu'un long discours, nous n'irons pas plus loin dans cette introduction sur ces structures, et nous précisons seulement qu'on les appelle *géométries de Cartan*, en hommage à Élie Cartan dont les travaux sont à l'origine de leur étude.

Nous entrons maintenant dans le vif du sujet.

1.3.1 (G, X) -structures

Même si le cadre de travail est très large, nous avons tout de même une exigence technique sur les espaces modèles que nous considérons, que nous énonçons maintenant.

Définition 1.3.1. Un espace homogène (G, X) est un *espace modèle pour une (G, X) -structure*, si X est une variété connexe de dimension finie, et G un groupe agissant sur X par difféomorphismes, et de manière *analytique*, c'est à dire par définition si cette action vérifie la condition suivante : si l'action de deux éléments g et h de G coïncide sur un ouvert de X , alors $g = h$.

Lemme 1.3.2. *Le modèle $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{R}P^2))$ est un modèle de (G, X) -structures.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'une application projective dont l'action est triviale sur un ouvert est l'identité. Or une telle application projective fixe toutes les directions de \mathbb{R}^3 , donc est bien triviale. \square

Remarques 1.3.3. 1. En particulier, l'action de G sur X est fidèle, ce qui autorise à confondre un élément de G avec le difféomorphisme de X qu'il définit.

2. Certaines propriétés des (G, X) -structures ne demandent pas que l'action de G sur X soit homogène, ni que G soit nécessairement un groupe de Lie. Même si on utilisera en pratique ces structures le plus souvent dans l'objectif d'étudier *in fine* des espaces homogènes sous l'action de groupes de Lie, la définition ci-dessus permet de s'autoriser si besoin à considérer des (G, X) -structures associées à des couples (G, X) un peu plus généraux (ce qui pourra parfois simplifier les formulations).

À partir de maintenant, si rien n'est précisé (G, X) est un espace modèle pour une (G, X) -structure, et n est la dimension de X .

La définition d'une (G, X) -structure est exactement calquée sur ce que l'on attend : ce sont les structures localement modelées sur (G, X) .

Définition 1.3.4. — Un (G, X) -atlas sur une variété M de dimension n est la donnée d'une famille de difféomorphismes locaux $\varphi_i: U_i \rightarrow X$ appelés *cartes du (G, X) -atlas*, définis sur les ouverts d'un recouvrement $(U_i)_i$ de X et vérifiant la condition de compatibilité suivante : pour tout $i \neq j$ dans I tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, le changement de carte $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ coïncide avec la restriction de l'action d'un élément de G sur l'ouvert $\varphi_i(U_i \cap U_j)$.

- Deux (G, X) -atlas sont dits *compatibles* ou *équivalents* si leur union est encore un (G, X) -atlas.
- Une (G, X) -structure sur une variété M de dimension n est la donnée d'une classe d'équivalence de (G, X) -atlas sur M , ou de façon équivalente la donnée d'un (G, X) -atlas *maximal*, ie qui contienne toutes les cartes qui lui soit compatibles. On dit également que M est une (G, X) -variété.

Remarque 1.3.5 (Les objets G -invariants sur X font sens sur toute (G, X) -variété). En particulier, le principe général que nous voulions mettre en application est bien vérifié : tout objet géométrique sur X préservé par le groupe de transformations G (et pouvant être tiré en arrière par les difféomorphismes locaux, ce qui est la moindre des choses pour un objet géométrique) fait sens sur une (G, X) -variété M , car les données définies localement sur M par les tirés en arrière de cet objet par les cartes d'un (G, X) -atlas se recollent bien pour définir un objet global sur M , puisque les changements de cartes préservent l'objet en question.

Exemples 1.3.6. 1. Le groupe $\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, g_{st})$ agit sur \mathbb{R}^n par isométries de sa métrique riemannienne standard g_{st} . La donnée d'une $(\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ -structure sur une variété M de dimension n définit sur M une métrique riemannienne g de la manière suivante : si $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une carte de l'atlas de la $(\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ -structure, alors on définit g sur U par $g_U = g|_U := \varphi^* g_{st}$, et les conditions de compatibilité des cartes du $(\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ -atlas font que si U et V sont deux ouverts

de l'atlas, les métriques g_U et g_V ainsi définies coïncident sur $U \cap V$, donc on définit bien ainsi une métrique g sur M .

Inversement, si (M, g) est une variété riemannienne *plate*, ie de courbure nulle, alors on sait qu'elle est localement isométrique à (\mathbb{R}^n, g_{st}) . Il existe donc un atlas de cartes $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ définies sur un recouvrement ouvert $(U_i)_i$ de M telles que $\varphi_i^* g_{st} = g$. Cette égalité impose que les changements de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ soient des isométries locales de (\mathbb{R}^n, g_{st}) , or toute isométrie locale entre ouverts de \mathbb{R}^n pour sa métrique riemannienne standard est la restriction de l'action d'un élément de $\mathbb{R}^n \rtimes O(n, \mathbb{R})$, donc les cartes φ_i définissent finalement un $(\mathbb{R}^n \rtimes O(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ -atlas sur M , qui définit en retour la métrique g sur M . De plus si deux $(\mathbb{R}^n \rtimes O(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ -atlas sur M définissent la même métrique sur M , alors par l'argument que nous venons d'utiliser, leurs cartes sont mutuellement compatibles, donc ils définissent la même $(\mathbb{R}^n \rtimes O(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ -structure sur M ; ainsi la $(\mathbb{R}^n \rtimes O(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ -structure sur M associée à une métrique plate g est bien définie.

Nous venons donc de voir que les variétés riemanniennes plates correspondent aux $(\mathbb{R}^n \rtimes O(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ -structures (il se passe la même chose pour les variétés riemanniennes à courbure constante égale à $+1$ et -1 , avec cette fois les modèles $(S^n, O(n+1, \mathbb{R}))$ et $(\mathbb{H}^n, PO(1, n))$ respectivement).

2. La structure lagrangienne de contact canonique (E^α, E^β) de l'espace modèle $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2)$ définie au paragraphe 1.2.1 est préservée par le groupe de transformations $PGL(3, \mathbb{R})$. Donc selon la remarque ci-dessus, toute $(PGL(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2))$ -variété M est naturellement munie d'une structure lagrangienne de contact canoniquement associée à sa $(PGL(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2))$ -structure, que nous noterons (E_M^α, E_M^β) .

Nous souhaitons maintenant décrire des procédés permettant d'obtenir de nouvelles (G, X) -structures à partir de structures déjà connues. Il est pratique pour cela de nous mettre préalablement d'accord sur ce que sont les isomorphismes des (G, X) -structures.

Définition 1.3.7. Un (G, X) -morphisme entre deux (G, X) -variétés M_1 et M_2 est un difféomorphisme local $f: M_1 \rightarrow M_2$ dont la lecture dans n'importe quel jeu de cartes locales des (G, X) -atlas soit la restriction de l'action d'un élément de G : si U est un ouvert de M_1 , et $\varphi: U \rightarrow X$, $\psi: f(U) \rightarrow X$ sont des cartes respectives des (G, X) -atlas de M_1 et M_2 , alors $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ coïncide sur U avec la restriction de l'action d'un élément $g \in G$.

Un (G, X) -isomorphisme est un (G, X) -morphisme qui est un difféomorphisme. L'ensemble des (G, X) -automorphismes d'une (G, X) -variété M forme un groupe noté $Aut(M)$.

On vérifie en particulier facilement grâce à l'hypothèse d'analyticité de l'action de G sur X la propriété ci-dessous des (G, X) -morphisms.

Lemme 1.3.8 (Localité des (G, X) -morphisms). *Soit M une (G, X) -variété connexe. Si deux (G, X) -morphisms f_1 et f_2 de M sur une (G, X) -variété quelconque coïncident sur un ouvert (non vide) de M , alors ils sont égaux.*

Nous allons maintenant essayer de tirer en arrière ou de pousser en avant des (G, X) -structures déjà connues sur de nouvelles variétés.

Comme avec n'importe quelle structure géométrique convenable, si $f: N \rightarrow M$ est un difféomorphisme local d'une variété N sur une (G, X) -variété M , on peut définir de façon univoque le *tiré en arrière* de la (G, X) -structure de M sur N comme l'unique (G, X) -structure sur N telle que f soit un (G, X) -morphisme. Deux cas nous intéressent particulièrement :

- Exemples 1.3.9.*
1. Toute (G, X) -structure sur une variété M induit en particulier une (G, X) -structure sur le revêtement universel $\tilde{M} \rightarrow M$. Nous considérerons désormais toujours le revêtement universel d'une (G, X) -variété M muni implicitement de cette (G, X) -structure canonique. Soulignons en particulier que le groupe fondamental $\pi_1(M)$ agit sur le revêtement universel \tilde{M} par (G, X) -morphisms.
 2. Un difféomorphisme local f d'une variété M dans X définit une unique (G, X) -structure sur M .

Il n'est en revanche pas toujours possible de pousser en avant une (G, X) -structure. On peut cependant définir des (G, X) -structures sur certains quotients d'une (G, X) -variété M . Si Γ est un sous-groupe discret de difféomorphismes de M agissant librement et proprement par (G, X) -morphisms, alors il existe une unique (G, X) -structure sur le quotient $\Gamma \backslash M$ telle que le revêtement $M \rightarrow \Gamma \backslash M$ soit un (G, X) -morphisme.

Ces deux procédés appliqués l'un après l'autre permettent de définir les exemples suivants de (G, X) -structures, qui seront particulièrement utiles.

Exemple 1.3.10. si M est une variété munie d'un difféomorphisme local $f: M \rightarrow X$ qui est équivariant pour un morphisme $\rho: \Gamma \rightarrow G$, où Γ est un sous-groupe discret de difféomorphismes de M agissant librement et

proprement, alors il existe une unique (G, X) -structure sur $\Gamma \backslash M$ telle que le revêtement $M \rightarrow \Gamma \backslash M$ et le difféomorphisme local f soient des (G, X) -morphisms (concrètement, la (G, X) -structure définie sur M par f passe au quotient sur $\Gamma \backslash M$, car Γ agit sur M par (G, X) -morphisms grâce à l'équivariance de f).

La propriété la plus importante des (G, X) -variétés est la possibilité, si la variété est simplement connexe, de prolonger les cartes du (G, X) -atlas sur la totalité de la variété (par un procédé d'analyticité analogue à celui qui permet de définir le prolongement analytique d'une application holomorphe). Nous renvoyons à [Thu97, §3.4 pp.139-141] pour une preuve du théorème ci-dessous.

Théorème 1.3.11 (Existence d'une application développante et d'un morphisme d'holonomie). *Soit M une (G, X) -variété connexe. Alors il existe un difféomorphisme local $\delta: \tilde{M} \rightarrow X$ qui est un (G, X) -morphisme, et un tel difféomorphisme local est appelé une application développante de M . Si de plus l'action de G sur X est transitive, alors :*

- *il existe pour toute application développante de M un morphisme $\rho: \pi_1(M) \rightarrow G$ tel que δ est ρ -équivariant, et un tel morphisme est appelé morphisme d'holonomie de M associé à l'application développante δ ;*
- *le couple (δ, ρ) est unique à conjugaison près dans G au sens suivant : si δ' est une autre application développante, alors il existe $g \in G$ tel que $\delta' = g \cdot \delta$, et le morphisme d'holonomie ρ' associé à δ' vérifie alors $\rho' = g\rho g^{-1}$.*

Remarque 1.3.12. Par analyticité de l'action de G sur X , le morphisme d'holonomie d'un couple (δ, ρ) est entièrement déterminé par son application développante. En effet, il existe un ouvert U de \tilde{M} tel que $\delta|_U$ soit un difféomorphisme de U sur son image, et alors pour $\gamma \in \pi_1(M)$, en notant de la même façon $\gamma|_U$ (respectivement $\rho(\gamma)$) et le difféomorphisme de \tilde{M} (respectivement de X) qu'il définit, on a par équivariance : $\rho(\gamma)|_{\delta(U)} = \delta|_U \circ \gamma|_U \circ (\delta|_U)^{-1}$.

Définition 1.3.13. On appelle *groupe d'holonomie* d'une (G, X) -structure sur une variété M l'image $\rho(\pi_1(M)) < G$ de $\pi_1(M)$ par un morphisme d'holonomie ρ .

On suppose à partir de maintenant que G agit transitivement sur X .

La première vertu de l'application développante et de son morphisme d'holonomie est de fournir des *invariants d'isomorphismes* de (G, X) -structures.

Lemme 1.3.14. *Soit φ un (G, X) -isomorphisme entre deux (G, X) -variétés M et N , $O, O' \subset X$ les images d'applications développantes de M et de N respectivement, et $H, H' < G$ les groupes d'holonomies associés. Alors il existe $g \in G$ tel que $O' = g \cdot O$ et $H' = gHg^{-1}$.*

Démonstration. En effet si $(\delta, \rho), (\delta', \rho')$ sont des couples d'application développante et de morphisme d'holonomie de M et de N respectivement, et si $\tilde{\varphi}$ est un relevé aux revêtements universels de l'isomorphisme φ , alors $\delta' \circ \tilde{\varphi}$ est une application développante de M , d'où l'existence de $g \in G$ tel que $\delta' \circ \tilde{\varphi} = g \cdot \delta$, ce qui prouve la première assertion. En ce qui concerne les groupes d'holonomies, pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$ on vérifie les égalités suivantes grâce aux propriétés d'équivariance des applications développantes, où l'on note $\tilde{\varphi}_*$ l'isomorphisme induit par $\tilde{\varphi}$ entre les groupes fondamentaux : $\rho'(\tilde{\varphi}_*(\gamma)) \cdot \delta' \circ \tilde{\varphi} = g\rho g^{-1} \cdot \delta \circ \tilde{\varphi}$, ce qui prouve la seconde assertion. \square

L'information fournie par l'application développante est en réalité bien plus précise. En effet, puisque M est le quotient de \tilde{M} par le groupe $\pi_1(M)$ agissant librement et proprement par difféomorphismes, en appliquant l'exemple 1.3.10, on voit qu'un couple (δ, ρ) d'application développante et de morphisme d'holonomie permet de reconstruire entièrement la (G, X) -structure de M (et l'application développante seule suffit même à la caractériser entièrement, puisque ρ est caractérisé par δ selon la remarque 1.3.12). En d'autres termes, toutes les (G, X) -variétés sont obtenues par le procédé décrit à l'exemple 1.3.10.

Le résultat suivant est une traduction de la remarque que nous venons de faire, il donne une condition suffisante pour qu'une (G, X) -structure sur une variété M soit en fait équivalente à une (H, Y) -structure, avec H un sous-groupe de G et Y un ouvert de X . On dira dans ce cas que la (G, X) -structure se *réduit* à une (H, Y) -structure.

Proposition 1.3.15. *Soit (δ, ρ) un couple d'application développante et de morphisme d'holonomie d'une (G, X) -variété M , et soit Y un ouvert de X sur lequel un sous-groupe H de G agit transitivement. Si δ est à valeurs dans Y et ρ à valeurs dans H , alors la (G, X) -structure de M se réduit à une (H, Y) -structure.*

Démonstration. En effet, l'application développante définit alors un atlas dont les cartes sont à valeurs dans Y , et les changements de cartes sont des restrictions d'éléments de H (et Y est alors bien stable par l'action de H). \square

Les cas particulièrement confortables sont ceux où la (G, X) -structure est entièrement caractérisée par son groupe d'holonomie, car l'étude de ces (G, X) -structures se réduit alors à un travail algébrique. Nous donnerons des exemples de cela par la suite, mais nous définissons pour commencer les (G, X) -structures en question.

Définition 1.3.16. On dit qu'une (G, X) -structure est *complète* si l'une de ses applications développantes est un revêtement $\delta: \tilde{M} \rightarrow X$ à valeur dans X . Si l'application développante est seulement un revêtement sur son image, alors on dit que la (G, X) -structure est *kleinienne*.

Remarque 1.3.17. Cette propriété est bien indépendante de l'application développante choisie selon la « quasi-unicité à action près de G » des applications développantes énoncée au théorème 1.3.11, ce qui donne un sens à la notion de complétude d'une (G, X) -structure.

On déduit de l'équivariance de δ pour ρ et de l'action libre et propre de $\pi_1(M)$ sur \tilde{M} le résultat suivant :

Proposition 1.3.18. *Soit M une (G, X) -variété connexe dont l'application développante est un revêtement sur son image Ω , avec Ω un ouvert simplement connexe de X (en particulier, $\Omega = X$ correspond au cas complet). Alors le groupe d'holonomie est un sous-groupe discret de G agissant librement et proprement sur Ω , et l'application développante induit un isomorphisme de (G, X) -structures de $M = \pi_1(M) \backslash \tilde{M}$ sur $\Gamma \backslash \Omega$.*

Si X n'est pas simplement connexe, la remarque ci-dessous nous permet de nous ramener au cas simplement connexe.

Remarque 1.3.19. Soit G un groupe de Lie agissant de manière analytique sur une variété connexe X . Alors le revêtement universel \tilde{G} de G agit naturellement sur le revêtement universel \tilde{M} de M . En effet, le revêtement universel d'un (bon) espace topologique peut être décrit comme l'espace des chemins à homotopie près (fixant les extrémités) basés en un point fixé. On utilise ce point de vue pour \tilde{G} et \tilde{M} , et on note $\tilde{g} = (\tilde{g}(t))_t$ et $\tilde{x} = (\tilde{x}(t))_t$ leurs éléments. L'action de \tilde{g} sur \tilde{x} est alors définie par : $\tilde{g} \cdot \tilde{x} := (\tilde{g}(t) \cdot \tilde{x}(t))_t$. On vérifie que cette action est encore analytique, et qu'elle est encore transitive si celle de G sur X l'est. On suppose désormais que c'est le cas.

Les applications développantes et morphismes d'holonomie δ et ρ d'une (G, X) -variété se relèvent alors en un couple $(\tilde{\delta}, \tilde{\rho})$, unique à action près de \tilde{G} comme dans l'énoncé du théorème 1.3.11. Donc toute (G, X) -structure sur une variété M induit une (\tilde{G}, \tilde{X}) -structure sur \tilde{M} , et inversement une (\tilde{G}, \tilde{X}) -structure définit clairement une (G, X) -structure canonique grâce à la projection $\tilde{X} \rightarrow X$ équivariante pour la projection $\tilde{G} \rightarrow G$. En d'autres termes, pour tout groupe de Lie G agissant transitivement et analytiquement sur une variété connexe M , il est utile d'observer que *la donnée d'une (G, X) -structure est équivalente à celle d'une (\tilde{G}, \tilde{X}) -structure*. De plus l'une est complète si et seulement si l'autre l'est (on utilise pour le sens direct de cette affirmation le fait qu'un morphisme de revêtements est un revêtement).⁷

Nous énonçons maintenant une propriété utile du morphisme d'holonomie défini pour le moment : il peut s'étendre à tous les (G, X) -morphisms de \tilde{M} .

Lemme 1.3.20. *Le morphisme d'holonomie ρ d'une (G, X) -variété M s'étend en un morphisme $\rho: \text{Aut}(\tilde{M}) \rightarrow G$ défini sur le groupe des (G, X) -morphisms de \tilde{M} , qui vérifie encore la relation d'équivariance :*

$$\delta \circ \varphi = \rho(\varphi) \circ \delta$$

pour tout $\varphi \in \text{Aut}(\tilde{M})$.

Démonstration. En effet, si φ est un automorphisme de \tilde{M} et δ une application développante, alors $\delta \circ \varphi$ est une nouvelle application développante, donc il existe selon le théorème 1.3.11 $g \in G$ tel que $\delta \circ \varphi = g \cdot \delta$, et cette équation caractérise entièrement $g \in G$, donc on peut poser $\rho(\varphi) = g$. On vérifie alors facilement que ceci définit bien un morphisme de groupes. \square

7. En général, si G n'est pas un groupe de Lie, on peut également définir un groupe \tilde{G} de difféomorphismes de \tilde{M} , munit d'une projection sur G , qui agisse naturellement et de manière analytique (respectivement transitive) sur \tilde{M} , de façon équivariante pour les deux projections, et de sorte que toute (G, X) -structure sur une variété M définisse une (\tilde{G}, \tilde{X}) -structure (et que la première soit complète si et seulement si la seconde l'est).

1.3.2 Géométries de Cartan

Géométrie de Cartan plate du modèle Considérons un espace homogène *connexe* sous l'action *fidèle* d'un groupe de Lie G , et notons cet espace homogène G/P avec P le stabilisateur d'un point, qui est un sous-groupe fermé de G . Si l'on part non pas de l'espace homogène lui-même, mais d'un couple (G, P) quelconque, ceci nous amène à faire deux restrictions pour obtenir un espace homogène de la forme voulue.

Définition 1.3.21 (Géométries de Klein modèles). On appellera *géométrie de Klein* la donnée d'un couple (G, P) avec G un groupe de Lie connexe et $P < G$ un sous-groupe fermé, tel que G/P soit connexe. Si de plus l'action de G sur G/P est fidèle, alors on dira que la géométrie de Klein (G, P) est *effective*.

On démontre facilement que :

Lemme 1.3.22. *Une géométrie de Klein (G, P) est effective si et seulement si P n'a pas de sous-groupe non trivial qui soit distingué dans G .*

On cherche une structure géométrique \mathcal{S} naturelle sur G/P , qui s'exprime à l'aide des outils classiques de la géométrie différentielle : fibrés et tenseurs, afin qu'elle soit aisément manipulable, et qui « définit » la géométrie de l'espace homogène $(G, G/P)$ au sens suivant : les symétries locales de \mathcal{S} sont exactement celles de l'espace homogène que l'on étudie, c'est à dire sont exactement les restrictions des difféomorphismes de G/P induits par les translations à gauche par des éléments de G . Nous avons vu au lemme 1.2.9, dans le cas particulier de l'espace modèle $\mathbb{P}(\mathbb{TR}P^2)$ de la géométrie lagrangienne de contact, que la structure lagrangienne de contact canonique est une structure tensorielle qui se trouve répondre exactement à cette question. Mais il semble difficile de trouver systématiquement une telle structure tensorielle, et c'est pour cette raison que nous allons maintenant décrire une procédure générale, dont l'application à n'importe quel espace homogène fournit une structure géométrique, plus compliquée qu'une simple structure tensorielle, mais dont la donnée est en un sens exactement équivalente à celle du couple (G, P) .⁸

Il semble raisonnable de vouloir tout d'abord se ramener au groupe G pour faire honneur aux symétries de l'espace homogène G/P , ie de considérer le P -fibré principal :

$$\pi: G \rightarrow G/P. \quad (1.3.1)$$

Nous souhaitons maintenant mettre en lumière la propriété particulière du groupe de Lie G d'être ... un groupe de Lie. Une conséquence remarquable de la structure de groupe de Lie de G est l'existence d'un parallélisme *canonique* de G , fourni par les translations à gauche, et nous commençons donc par chercher de ce côté.

Définition 1.3.23 (Forme de Maurer-Cartan et géométrie de Cartan plate modèle). — On appelle *1-forme* sur une variété M à valeur dans un espace vectoriel V la donnée d'une application lisse $\omega: TM \rightarrow V$, qui soit linéaire sur chaque espace tangent.

- On appelle *trivialisation* d'un fibré vectoriel E sur une variété M la donnée d'une application lisse $t: E \rightarrow V$ à valeur dans un espace vectoriel V qui soit un isomorphisme linéaire sur chaque fibre. Dans le cas particulier où le fibré vectoriel est le fibré tangent TM de M , une trivialisation est une 1-forme sur M appelée *parallélisme sur M* .
- On appelle *forme de Maurer-Cartan* d'un groupe de Lie G , et on note $\omega_G: TG \rightarrow \mathfrak{g}$, la 1-forme sur G à valeur dans son algèbre de Lie \mathfrak{g} définie par : $\omega_G(v) = D_g L_{g^{-1}}(v)$ pour $v \in T_g G$.
- On appelle *géométrie de Cartan plate modèle* d'une géométrie de Klein (G, P) le couple $(\pi: G \rightarrow G/P, \omega_G)$ formé par son P -fibré principal canonique et sa forme de Maurer-Cartan.

Un *isomorphisme* (respectivement *isomorphisme local*) de la géométrie de Cartan plate modèle $(\pi: G \rightarrow G/P, \omega_G)$ est un difféomorphisme (resp. local) φ de G qui soit un isomorphisme (resp. local) du P -fibré principal $G \rightarrow G/P$, ie qui soit équivariant pour l'action de P par translations à droite sur G , et qui préserve la forme de Maurer-Cartan, ie tel que $\varphi^* \omega_G = \omega_G$. Nous vérifions avec cette définition que la forme de Maurer-Cartan fait bien son travail.

⁸. Nous avons également vu au lemme 1.2.8 que la structure lagrangienne de contact canonique sur $\mathbb{P}(\mathbb{TR}P^2)$ est naturelle avec le point de vue algébrique sur $\mathbb{P}(\mathbb{TR}P^2) = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/P_{min}$. Une autre manière de faire serait donc de définir, associées à n'importe quel couple (G, P) vérifiant de bonnes hypothèses, des structures algébriques *infinitésimales* définies à partir de la structure des algèbres de Lie de G et de P . C'est ce qui est fait dans [ÇapS09, §3.1], et l'intérêt de la théorie développée dans ce livre est qu'elle fait justement le lien entre ces structures géométriques « concrètes » (certains types de distributions) et les géométries de Cartan. Voir le dernier paragraphe de la section 1.3.2 pour plus de détails sur ce point.

Proposition 1.3.24. *Les isomorphismes (respectivement locaux) de la géométrie de Cartan plate modèle sont les translations à gauche par G (resp. les restrictions de telles transformations).*

Démonstration. Soit $\varphi: U \rightarrow V$ un isomorphisme local de la géométrie de Cartan plate modèle entre deux ouverts connexes non vides U et V de G , soit $x \in U$, et posons $g = \varphi(x)x^{-1}$. Le difféomorphisme local $L_g^{-1} \circ \varphi$ préserve encore la forme de Maurer-Cartan, et a la même valeur que l'application identité en x . Or de façon générale on a :

Fait. Soit M une variété munie d'un parallélisme $t: TM \rightarrow V$. Si f est un difféomorphisme local de M qui préserve la trivialisatation t (ie $f^*t = t$), et si f fixe un point de M , alors f est localement constante.

Démonstration du fait. On peut supposer que M est connexe. Pour $X \in V$, on notera \tilde{X} le champ de vecteurs sur M défini par $t(\tilde{X}) \equiv X$, et $(\varphi_Y^s)_s$ le flot local d'un champ Y quelconque sur M . L'ensemble $E = \{x \in M \mid f(x) = x\}$ est un fermé de M , par hypothèse non vide. Puisque f préserve la trivialisatation t , on vérifie que pour tout $x \in M$, s petit, et $X \in V: t_{f \circ \varphi_{\tilde{X}}^s(x)}(\frac{d}{ds}|_s f \circ \varphi_{\tilde{X}}^s(x)) = X$, d'où on déduit que $f \circ \varphi_{\tilde{X}}^s(x) = \varphi_{\tilde{X}}^s(f(x))$. Cette dernière relation, écrite pour une base X_1, \dots, X_n de V , et pour un point $x \in E$, assure que E est également ouvert. En effet on alors $f \circ \varphi_{\tilde{X}_i}^s(x) = \varphi_{\tilde{X}_i}^s(x)$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et s petit, or les orbites locales des champs $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ de M décrivent en tout point $x \in E$ un voisinage de x . Donc par connexité $E = M$, ce qui termine la preuve. \square

Donc $L_g^{-1} \circ \varphi = id$ sur U , ie φ est la restriction à U de la translation à gauche par g , ce qui termine la preuve de la proposition. \square

La forme de Maurer-Cartan ω_G définit des champs de vecteurs privilégiés $\omega_G = \text{constante}$.

Définition 1.3.25 (Champs de vecteurs invariants à gauche). Pour $X \in \mathfrak{g}$, on appelle *champ de vecteur invariant à gauche* et on note \tilde{X} ou X^L le champ défini par $\omega_G(\tilde{X}) \equiv X$.

Nous avons jusqu'à présent évoqué deux propriétés triviales de la forme de Maurer-Cartan : ω_G est un isomorphisme en restriction à chaque espace tangent, et ω_G caractérise les champs invariants à gauche. Nous énonçons maintenant deux propriétés supplémentaires non immédiates. Nous avons pour cela besoin de définir le crochet de Lie de deux 1-formes à valeur dans une algèbre de Lie.

Définition 1.3.26. Soit ω_1 et ω_2 deux 1-formes définies sur une même variété M , et à valeurs dans une même algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$. On note $\omega_1 \wedge \omega_2: TM \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ le *produit extérieur* de ces deux 1-formes, à valeur dans le produit tensoriel $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Puisque le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ est bilinéaire, il est équivalent à la donnée d'une application linéaire $C: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, et on définit alors le *crochet de Lie* de ω_1 et ω_2 , que l'on note $[\omega_1, \omega_2]$, comme $[\omega_1, \omega_2] = C \circ (\omega_1 \wedge \omega_2): TM \rightarrow \mathfrak{g}$.

On vérifie facilement le lemme suivant (démontré dans [SC97, Lemma 1.5.21 p.61]).

Lemme 1.3.27. *Soit ω une 1-forme sur une variété M à valeur dans une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$. Alors pour tout $x \in M$ et $X, Y \in T_x M$ on a : $[\omega(X), \omega(Y)] = 1/2[\omega, \omega](X, Y)$.*

On peut maintenant énoncer les propriétés fondamentales de ω_G .

Proposition 1.3.28. 1. Pour tout $g \in G$, en notant Ad l'action adjointe de G sur son algèbre de Lie : $R_h^* \omega_G = Ad(g)^{-1} \cdot \omega_G$.
2. La forme de Maurer-Cartan vérifie l'équation structurelle suivante reliant sa différentielle à la structure algébrique de \mathfrak{g} :

$$d\omega_G + 1/2[\omega_G, \omega_G] = 0. \quad (1.3.2)$$

Démonstration. Nous laissons la démonstration de la première propriété aux lecteurs-trices ; il suffit de tester l'égalité sur les champs invariants à gauche (elle est démontrée dans [SC97, Proposition 3.4.2 p.110]). Nous allons utiliser pour l'équation structurelle la *formule de Cartan* suivante pour la différentielle d'une 1-forme α quelconque : si X et Y sont deux champs de vecteurs, alors

$$d\alpha(X, Y) = X \cdot \alpha(Y) - Y \cdot \alpha(X) - \alpha([X, Y]).$$

En appliquant cette formule à ω_G et à deux champs invariants à gauche \tilde{X} et \tilde{Y} , on obtient : $d\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = -\omega([X, Y]) = -1/2[\omega, \omega](\tilde{X}, \tilde{Y})$ selon le lemme 1.3.27, ce qui montre l'équation voulue pour tous champs invariants à gauche. \square

Nous terminons ce paragraphe en énonçant le résultat suivant, démontré dans [SC97, Theorem 3.8.7 p.130], qui explique en quoi l'équation structurelle de la forme de Maurer-Cartan d'un groupe de Lie G est structurelle, et en quoi elle semble miraculeusement caractériser au mieux la structure de G .

Théorème 1.3.29 (Caractérisation des groupes de Lie par leur forme de Maurer-Cartan). *Soit M une variété connexe munie d'un parallélisme $\omega: TM \rightarrow \mathfrak{g}$ à valeur dans une algèbre de Lie \mathfrak{g} et vérifiant les deux conditions suivantes ;*

1. ω vérifie l'équation structurelle : $d\omega + 1/2[\omega, \omega] = 0$;
2. ω est complète, ie les champs ω -constants sont complets.

Alors en notant $\pi: G \rightarrow M$ le revêtement universel de M , pour tout choix d'un point base $e \in G$, G admet une unique structure de groupe de Lie d'élément neutre e , d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , et dont la forme de Maurer-Cartan soit $\pi^*\omega$.

Définitions et premières propriétés Nous allons maintenant généraliser la structure mise en évidence au paragraphe précédent sur une géométrie de Klein (G, P) , sur toute variété de même dimension que l'espace homogène G/P . Il est plus pratique d'imposer systématiquement au modèle d'une géométrie de Cartan d'être effectif.

Définition 1.3.30. Un couple (G, P) formé d'un groupe de Lie connexe G et d'un sous-groupe fermé P de G est un *modèle pour une géométrie de Cartan* si c'est une géométrie de Klein *effective*.

Remarque 1.3.31. En particulier, on remarque que tout modèle pour une (G, X) -structure tel que l'action de G sur X est transitive, ie de la forme $X = G/P$, est un modèle pour une géométrie de Cartan, car l'action de G sur G/P est en particulier effective (mais la réciproque est fausse).

Exemple 1.3.32. L'espace modèle $(\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), P_{min})$ de la géométrie lagrangienne de contact est donc un espace modèle pour une géométrie de Cartan selon le lemme 1.3.2.

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette section, si rien n'est précisé, (G, P) est un couple modèle pour une géométrie de Cartan, \mathfrak{g} et \mathfrak{p} sont les algèbres de Lie respectives de G et de P , et Ad est la représentation adjointe de G sur \mathfrak{g} , qui induit par restriction une représentation linéaire de P sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$.

Nous définissons préalablement les champs de vecteurs fondamentaux associés à une action à droite d'un groupe de Lie sur une variété, et nous rappelons la définition d'un fibré principal et de ses isomorphismes (pour plus de détails sur cette notion ainsi que sur celle de fibré vectoriel associé –dont nous ne ferons pas un usage fondamental– on renvoie à [SC97, §1.3]).

Définition 1.3.33. — Soit M une variété munie d'une action à droite d'un groupe de Lie G . Notons \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G et \exp son application exponentielle. On définit pour tout $X \in \mathfrak{g}$ un champ de vecteurs sur M appelé *champ fondamental associé à X* , noté X^R et défini pour $x \in M$ par : $X^R(x) = \frac{d}{ds}|_{s=0} x \cdot \exp(sX)$.

- Soit P un groupe de Lie. Un fibré $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ sur une variété M est un *P -fibré principal* si \hat{M} est muni d'une action à droite de P , qui préserve chaque fibre de π et agisse sur elle simplement transitivement. Les P -fibrés principaux sont exactement les fibrés $M \rightarrow M/P$ obtenus à partir d'une action à droite libre et propre de P sur une variété M .
- Un *isomorphisme* (respectivement local) entre deux P -fibrés principaux $\hat{M}_1 \rightarrow M_1$ et $\hat{M}_2 \rightarrow M_2$ est un difféomorphisme (resp. local) $\hat{\varphi}$ de \hat{M}_1 sur \hat{M}_2 qui est P -équivariant, donc qui définit en particulier un unique difféomorphisme (resp. local) φ de M_1 sur M_2 tel que $\hat{\varphi}$ relève φ .

On vérifie facilement les propriétés suivantes des champs de vecteurs fondamentaux (démontrées dans [Mic08, Lemma 6.3 p.68]), que nous énonçons en reprenant les notations de la première définition ci-dessus.

Propriétés 1.3.34. 1. L'application $\Theta: X \in \mathfrak{g} \mapsto X^R \in \chi(M)$ est un morphisme d'algèbres de Lie.
2. L'action de G est localement fidèle⁹ si et seulement si Θ est injective.

Nous pouvons maintenant modéliser la définition d'une géométrie de Cartan sur la géométrie de Cartan plate du modèle, en conservant les trois premières propriétés mises en évidence (mais pas l'équation de structure : cet écart à la situation *plate* est justement ce qui nous permettra d'obtenir de *nouvelles* structures géométriques).

9. C'est à dire qu'il existe un voisinage U de l'élément neutre e tel que pour $g \in U$, si g fixe un point de M alors $g = e$.

Définition 1.3.35 (Les géométries de Cartan et leurs isomorphismes). Une *géométrie de Cartan modélée sur* (G, P) sur une variété M de dimension $\dim(G/P)$ consiste en la donnée d'un P -fibré principal $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ au dessus de M , et d'une 1-forme ω sur \hat{M} à valeurs dans \mathfrak{g} qui vérifie les conditions suivantes :

1. ω est un parallélisme de \hat{M} , ie pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$, $\omega_{\hat{x}}$ est un isomorphisme linéaire de $T_{\hat{x}}\hat{M}$ sur \mathfrak{g} ;
2. les champs fondamentaux sont ω -constants, ie pour tout $X \in \mathfrak{p}$, $\omega(X^R) \equiv X$;
3. ω est également P -équivalente à droite au sens suivant : pour tout $p \in P$, $R_p^*\omega = Ad(p)^{-1} \cdot \omega$.

Une connexion ω vérifiant ces hypothèses est appelée *connexion de Cartan*.

Un *isomorphisme* (respectivement local) entre deux géométries de Cartan $(\pi_1: \hat{M}_1 \rightarrow M_1, \omega_1)$ et $(\pi_2: \hat{M}_2 \rightarrow M_2, \omega_2)$ est un difféomorphisme (resp. local) φ entre M_1 et M_2 recouvert par un isomorphisme $\hat{\varphi}$ de P -fibrés principaux vérifiant $\hat{\varphi}^*\omega_2 = \omega_1$ (on l'appelle automorphisme –resp. local– si les deux géométries de Cartan sont les mêmes).

À partir de maintenant, si rien n'est précisé $(\pi: \hat{M} \rightarrow M, \omega)$ est une *géométrie de Cartan modélée sur un couple modèle* (G, P) pour une *géométrie de Cartan*.

Remarques 1.3.36. 1. En particulier, tout ouvert d'une variété munie d'une géométrie de Cartan est canoniquement muni d'une géométrie de Cartan par restriction, que nous appellerons *géométrie de Cartan induite*.

Une autre manière plus intéressante d'obtenir facilement des géométries de Cartan est d'utiliser nos fidèles $(G, G/P)$ -structures (ce qui est autorisé par la remarque 1.3.31, car les espaces modèles $(G, G/P)$ de (G, X) -structures sont en particulier des modèles pour les géométries de Cartan). On remarque d'abord que l'on peut tirer en arrière une géométrie de Cartan par un difféomorphisme local en tirant en arrière la connexion de Cartan et son fibré (en particulier une géométrie de Cartan sur M induit donc toujours une géométrie de Cartan canonique sur son revêtement universel \tilde{M}). L'application développante d'une $(G, G/P)$ -structure induit donc naturellement une géométrie de Cartan sur \tilde{M} en tirant en arrière la géométrie de Cartan plate modèle, qui est de plus $\pi_1(M)$ -invariante par équivalence de l'application développante. On peut donc la pousser en avant en une géométrie de Cartan sur M .¹⁰ La géométrie de Cartan associée à une $(G, G/P)$ -structure est caractérisée par le fait que l'application développante (ou de façon équivalente les cartes du $(G, G/P)$ -atlas) sont des isomorphismes locaux de géométries de Cartan.

2. Pour toute fibre F du fibré principal \hat{M} , l'action simplement transitive de P induit pour tout choix d'un point x dans F une identification ψ_x entre F et P définie par $\psi_x: x \cdot p \mapsto p$, telle que pour $p \in P$, $\psi_{x \cdot p} = p^{-1}\psi_x$. Cette identification permet de donner un sens à la forme de Maurer-Cartan de P sur F . En effet selon la relation d'équivalence des identifications entre F et P ainsi que l'invariance à gauche de la forme de Maurer-Cartan de P , la 1-forme $\psi_x^*\omega_P$ est la même pour tout point-base $p \in F$. On appelle simplement cette forme la forme *induite sur les fibres de \hat{M} par la forme de Maurer-Cartan de P* , et on la note $\omega_F = \psi_x^*\omega_P$. La deuxième hypothèse faite sur les connexions de Cartan : les champs fondamentaux sont ω -constants, fait le lien entre la structure de fibré principal de \hat{M} et ω , et plus précisément signifie exactement que ω coïncide sur les fibres de \hat{M} avec la forme induite par la forme de Maurer-Cartan de P , ie pour faire plus bref : $\omega|_F = \omega_F$.
3. La première hypothèse faite sur la connexion de Cartan est simplement qu'elle soit un parallélisme de \hat{M} . La troisième hypothèse est celle qui permet à une géométrie de Cartan de définir également des identifications canoniques des espaces tangents de M . On vérifie en effet la proposition suivante (démontrée dans [SC97, Theorem 5.3.15 p.188]).

Proposition 1.3.37 (Fibré tangent d'une géométrie de Cartan). *Soit $(\pi: \hat{M} \rightarrow M, \omega)$ une géométrie de Cartan sur une variété M modélée sur (G, P) . Alors pour tout point $x \in M$ et tout point $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$, les applications suivantes sont des isomorphismes :*

$$\overline{D_{\hat{x}}\pi}: T_{\hat{x}}\hat{M}/\ker(D_{\hat{x}}\pi) \xrightarrow{\sim} T_x M, \quad \overline{\omega_{\hat{x}}}: T_{\hat{x}}\hat{M}/\ker(D_{\hat{x}}\pi) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}/\mathfrak{p},$$

et induisent une identification canonique entre l'espace tangent à M en x et le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, notée :

$$i_{\hat{x}} = \overline{\omega_{\hat{x}}} \circ (\overline{D_{\hat{x}}\pi})^{-1}: T_x M \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}/\mathfrak{p}. \quad (1.3.3)$$

¹⁰. Tout ceci est équivalent à définir localement une géométrie de Cartan en tout point de M en tirant en arrière la géométrie de Cartan plate modèle par les cartes du $(G, G/P)$ -atlas, car ces données se recollent puisque les changements de cartes sont des isomorphismes de la géométrie de Cartan plate modèle de G/P .

De plus, l'équivariance à droite de la connexion ω induit une équivariance des identifications $i_{\hat{x}}$: pour $p \in P$,

$$i_{\hat{x} \cdot p} = Ad(p^{-1}) \cdot i_{\hat{x}}. \quad (1.3.4)$$

En d'autres termes, la géométrie de Cartan de M induit un isomorphisme canonique entre le fibré tangent à M et le fibré vectoriel $\hat{M} \times_P \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ sur M associé au fibré principal \hat{M} pour la représentation de P à droite sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ définie par : $v \cdot p = Ad(p)^{-1}(v)$.

Nous faisons maintenant une courte digression sur un point de vue alternatif sur les géométries de Cartan.

Remarque 1.3.38 (Point de vue local par les atlas de jauges de Cartan). Le désavantage d'une géométrie de Cartan est qu'elle n'est pas définie par une donnée géométrique explicite sur M , mais sur un fibré principal au dessus de M . Une autre façon de faire est de considérer les 1-formes locales $\theta = s^*\omega$ définies sur M par les tirés en arrière de la connexion de Cartan ω par des sections locales s du fibré principal de la géométrie de Cartan. On obtient un atlas de 1-formes locales $\theta: U \rightarrow \mathfrak{g}$ sur M , vérifiant la condition de *régularité* suivante : la composition $\bar{\theta}: U \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ est un isomorphisme ; de telles 1-formes locales sur M sont appelées *jauges locales*. Cet atlas dépend évidemment des sections choisies, donc si l'on espère rendre la donnée d'une géométrie de Cartan équivalente à celle d'un atlas de jauges, il faut au moins donner un sens univoque à l'atlas associé à une géométrie de Cartan, donc commencer par trouver une relation d'équivalence entre deux 1-formes locales θ_1 et θ_2 qui soit vérifiée par les jauges locales associées à deux sections différentes de la géométrie de Cartan. La bonne condition de *compatibilité* est la suivante : si θ_1 et θ_2 sont définies sur des ouverts U et V d'intersection non vide, alors $\theta_1 \sim \theta_2$ si et seulement si il existe une application lisse $k: U \cap V \rightarrow P$ telle que sur $U \cap V$ on ait l'égalité : $\theta_2 = Ad(k^{-1}) \cdot \theta_1 + k^*\omega_P$. On vérifie que les jauges locales associées à différentes sections du fibré d'une géométrie de Cartan vérifient cette condition de compatibilité (voir [SC97, Proposition 5.2.5 p.183]). Réciproquement, si l'on définit un *atlas de jauges locales* comme un atlas de jauges définies sur un recouvrement ouvert de M , et toutes compatibles les unes avec les autres, et si l'on dit que deux atlas de jauges locales sont *équivalents* si leur union est encore un atlas de jauges, alors on peut montrer que la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas de jauges est équivalente à celle d'une géométrie de Cartan sur M (voir [SC97, §5.2]).

L'utilisation d'atlas de jauges locales est le point de vue d'origine d'Élie Cartan. On renvoie à [SC97, §5.1] pour plus de détails au sujet des jauges locales. On devine qu'il est plus lourd techniquement, et moins élégant, d'utiliser le point de vue des jauges locales au lieu de celui du fibré principal. Cependant, les jauges locales permettent de définir concrètement des géométries de Cartan, nous donnerons plus de détails à ce sujet au paragraphe consacré aux problèmes d'équivalence à la fin de cette section.

Nous terminons cet aparté en soulignant que les atlas de jauges locales ont également le mérite d'attirer notre attention sur certaines identifications triviales entre géométries de Cartan. En effet, si l'on fixe un P -fibré principal $\hat{M} \rightarrow M$, et que l'on choisit une connexion de Cartan ω sur \hat{M} , alors tout automorphisme b du fibré principal \hat{M} différent de l'identité induit une connexion de Cartan $b^*\omega$ différente de ω , ie b induit un isomorphisme entre deux géométries de Cartan différentes sur la même variété M , qui recouvre l'identité. On appelle *équivalence* un tel isomorphisme trivial entre deux géométries de Cartan sur la même variété et le même fibré principal, qui recouvre l'identité sur M . Le fait est que les atlas de jauges ne détectent pas les équivalences de géométries de Cartan. Lorsqu'on utilise les jauges pour construire des géométries de Cartan, on les étudie donc à isomorphisme et équivalence près.

Nous en venons maintenant à un outil, associé à toute géométrie de Cartan, qui est l'un de leurs intérêts principaux : l'existence d'une 2-forme appelée *courbure*, dont l'annulation est équivalente à être localement modelée sur le modèle de la géométrie de Cartan.

Définition 1.3.39. La 2-forme $d\omega + 1/2[\omega, \omega]$ associée à une connexion de Cartan ω est appelée *courbure* de la connexion ou de la géométrie de Cartan associée. Une géométrie de Cartan est dite *sans torsion* si sa courbure est à valeur dans \mathfrak{p} . Une géométrie de Cartan est dite *plate* si sa courbure est identiquement nulle.

Exemple 1.3.40. La géométrie de Cartan plate modèle est bien plate selon l'équation structurelle (1.3.2) ! Donc, puisque l'annulation de la courbure est une propriété locale, la géométrie de Cartan définie par une $(G, G/P)$ -structure est également plate.

La courbure vérifie les propriétés suivantes (la première est une conséquence immédiate de la formule de Cartan sur la différentielle d'une 1-forme, et les trois suivantes sont prouvées dans l'ordre dans [SC97, Lemma 5.3.9, Corollary 5.3.10, Lemma 5.3.23]).

Propriétés 1.3.41. 1. Soit $X, Y \in \mathfrak{g}$ et \bar{X}, \bar{Y} les champs ω -constants de \hat{M} associés. Alors la courbure mesure l'écart de $[\bar{X}, \bar{Y}]$ à être un champ ω -constant : $\omega([\bar{X}, \bar{Y}]) = [X, Y] - \Omega(\bar{X}, \bar{Y})$.

2. La courbure Ω est horizontale, ie en tout point de \hat{M} , si v est un vecteur tangent à la fibre, et w un vecteur quelconque, alors $\Omega(v, w) = 0$.
3. La courbure vérifie la propriété d'équivariance suivante : $R_p^* \Omega = Ad(p)^{-1} \cdot \Omega$.
4. Grâce à l'horizontalité de Ω , la fonction $K: \hat{M} \rightarrow End(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$ vérifiant pour $\hat{x} \in \hat{M}$ quelconque la formule :

$$K(\hat{x})(v, w) = \Omega(\hat{x})(\omega_{\hat{x}}^{-1}(v), \omega_{\hat{x}}^{-1}(w))$$

est bien définie. On appelle cette fonction la fonction de courbure de la géométrie de Cartan, et sa donnée est équivalente à celle de Ω . En particulier, Ω s'annule en un point $\hat{x} \in \hat{M}$ si et seulement si $K(\hat{x}) = 0$.

Elle est de plus P -équivariante pour l'action linéaire à droite de P sur l'espace vectoriel $End(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$ définie par :

$$(f \cdot p)(v, w) = Ad(p)^{-1}(f(Ad(p) \cdot v, Ad(p) \cdot w)),$$

et on définit également l'action à gauche de P sur $End(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$ induite par l'action à droite que nous venons de définir, ie $p \cdot f := f \cdot p^{-1}$.

Enfin si $\hat{\varphi}: \hat{M}_1 \rightarrow \hat{M}_2$ est un isomorphisme local entre deux géométries de Cartan de fonctions de courbure respectives K_1 et K_2 , alors pour tout $\hat{x} \in \hat{M}_1$ on a : $K_1(\hat{x}) = K_2(\hat{\varphi}(\hat{x}))$.

Nous énonçons maintenant un résultat maintes fois promis (et démontré dans [SC97, Theorem 5.5.1 p.211]) : la courbure d'une géométrie de Cartan est l'invariant complet pour mesurer l'isomorphisme local avec la géométrie de Cartan modèle.

Théorème 1.3.42 (Géométries de Cartan plates). *Soit $(\pi: \hat{M} \rightarrow M, \omega)$ une géométrie de Cartan plate modelée sur (G, P) . Alors tout point $x \in M$ a un voisinage U isomorphe (pour sa géométrie de Cartan induite) à un ouvert de la géométrie de Cartan plate modèle $(G \rightarrow G/P, \omega_G)$. De plus cet isomorphisme est canonique au sens suivant : deux tels isomorphismes diffèrent par une translation à gauche par un élément de G .*

Dans le cas où le modèle (G, P) est un modèle de $(G, G/P)$ -structures (ie si l'action de G sur G/P est analytique), on en déduit que les géométries de Cartan plates sont équivalentes aux $(G, G/P)$ -structures.

Corollaire 1.3.43 (Équivalence avec les $(G, G/P)$ -structures). *Supposons que l'action de G sur G/P est analytique. Alors les cartes fournies par le théorème 1.3.42 permettent de définir une bijection entre les géométries de Cartan plates modelées sur (G, P) et les $(G, G/P)$ -structures, caractérisée par la condition suivante : les cartes d'un (G, X) -atlas des secondes sont des isomorphismes locaux des premières.*

Démonstration. Il suffit de construire un application inverse de celle décrite à la remarque 1.3.36 qui associe à toute $(G, G/P)$ -structure une géométrie de Cartan plate modelée sur (G, P) . Prenons un atlas d'isomorphismes $(\varphi_i)_i$ définis sur les ouverts d'un recouvrement $(U_i)_i$ de M et à valeur dans G/P , fourni par le théorème 1.3.42. Les changements de cartes de cet atlas sont des isomorphismes de la géométrie de Cartan plate modèle, donc des restrictions de l'action à gauche d'éléments de G selon la proposition 1.3.24. Donc l'atlas $(\varphi_i)_i$ est bien un $(G, G/P)$ -atlas de M , ce qui termine la preuve du corollaire. \square

Structures lagrangiennes de contact associées à des géométries de Cartan Grâce aux isomorphismes $i_{\hat{x}}: T_x M \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ décrits à la remarque 1.3.36, tout tenseur G -invariant du modèle G/P induit sur toute géométrie de Cartan modelée sur G/P un tenseur du même type. Plus précisément, dans le cas des distributions auquel nous nous intéresserons dans ce travail, nous avons les résultats suivants :

Proposition 1.3.44. *Soit M une variété munie d'une géométrie de Cartan modelée sur G/P .*

1. *Si \mathcal{D} est une distribution G -invariante sur G/P , elle induit une distribution naturelle $\tilde{\mathcal{D}}$ sur M définie par : $\tilde{\mathcal{D}}(x) = i_{\hat{x}}^{-1}(\mathcal{D}([e]))$.*
2. *Supposons que le modèle G/P est de dimension trois. Si la géométrie de Cartan est sans torsion, et si (E_1, E_2) est une structure lagrangienne de contact G -invariante sur le modèle G/P , alors $(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2)$ est également une distribution lagrangienne de contact sur M .*

Démonstration. Nous laissons aux lecteurs-trices la démonstration du premier point, qui est une conséquence immédiate de l'équivariance des identifications $i_{\hat{x}}$, et du fait général suivant : un tenseur G -invariant sur un espace homogène G/P provient d'un tenseur $Ad(P)$ -invariant sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$.

Pour le second point, nous supposons que (E_1, E_2) est définie par translation à gauche des directions $\mathbb{R}v, \mathbb{R}w \subset \mathfrak{g}$, qui sont par hypothèse $Ad(P)$ -invariantes. La démonstration est proche de celle du lemme

1.2.8. Les champs ω -constants V et W associés à v et w se projettent par $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ dans \tilde{E}_1 et \tilde{E}_2 respectivement, donc pour tout $x \in M$ et $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$, $D_{\hat{x}}\pi$ induit un isomorphisme entre l'image de $Vect(V, W)(\hat{x})$ dans $T_{\hat{x}}\hat{M}/\ker(D_{\hat{x}}\pi)$ et $(\tilde{E}_1 \oplus \tilde{E}_2)(x)$. Selon la première propriété 1.3.41 mesurant l'écart du crochet de deux champs ω -constants à être ω -constant via la courbure, et puisque la géométrie que nous considérons est sans torsion par hypothèse, on a dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ l'égalité : $\omega([V, W]) = [v, w]$. Or $E_1 \oplus E_2$ est de contact, donc $[v, w] \notin Vect(v, w) + \mathfrak{p}$. Il existe en tout point $x \in M$ des champs locaux X et Y engendrant les distributions \tilde{E}_1 et \tilde{E}_2 et π -reliés à V et W respectivement, ie : pour tout y assez proche de x et $\hat{y} \in \pi^{-1}(y)$, $D_{\hat{y}}\pi(V(\hat{y})) = X(y)$ et de même pour W et Y . On a alors pour $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$: $D_{\hat{x}}\pi([V, W](\hat{x})) = [X, Y](x)$, donc $[X, Y](x) \notin (\tilde{E}_1 \oplus \tilde{E}_2)(x)$. Donc selon la proposition 1.1.10, $(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2)$ est bien une structure lagrangienne de contact, ce qui termine la preuve de la proposition. \square

Définition 1.3.45. Toute géométrie de Cartan sans torsion \mathcal{C} modélée sur $(\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), P_{min})$ sur une variété M définit donc sur M par le procédé décrit dans la proposition 1.3.44 une structure lagrangienne de contact canonique, associée à la structure standard (E^α, E^β) du modèle $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/P_{min}$, que l'on notera (E_M^α, E_M^β) et que l'on appellera *structure lagrangienne de contact α - β canonique* associée à la géométrie de Cartan \mathcal{C} sur M . Elle est caractérisée, pour $x \in M$ et $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$, par :

$$i_{\hat{x}}(E_M^\alpha(x)) = E^\alpha([e]), \quad i_{\hat{x}}(E_M^\beta(x)) = E^\beta([e]).$$

On dira qu'une $(\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), P_{min})$ -géométrie de Cartan sur une variété M est *associée* à une structure lagrangienne de contact (E_1, E_2) sur M si $E_M^\alpha = E_1$ et $E_M^\beta = E_2$.

Problème d'équivalence Nous venons de voir que l'on peut parfois facilement associer à une géométrie de Cartan une structure géométrique concrète (ie la donnée de tenseurs ou de distributions) sur la variété M qui supporte la géométrie de Cartan. Le problème est souvent de pouvoir aller dans le sens inverse.

Nous espérons avoir convaincu les lecteurs-trices de l'utilité des géométries de Cartan, en ce qu'elles permettent d'étudier des structures géométriques très générale avec des outils très pratiques, dont la courbure est un exemple particulièrement important car il permet de savoir dans quels cas la structure étudiée est une $(G, G/P)$ -structure (mais il n'est pas le seul, voir encore [SC97, §5.3] pour des exemples d'autres outils différentiels associés à une géométrie de Cartan). Pour rendre les géométries de Cartan utilisables en pratique pour étudier une structure géométrique donnée, il reste cependant à résoudre un problème important, qui est celui du dictionnaire entre ces structures géométriques et les géométries de Cartan : on souhaiterait disposer d'une correspondance bijective et naturelle entre les géométries de Cartan d'un type fixé, et les structures géométriques qui leur sont associées. C'est ce qu'on appelle le *problème d'équivalence*.

Résoudre un problème d'équivalence pour une classe donnée de géométries de Cartan et de structures géométriques demande toujours d'imposer une condition supplémentaire sur la connexion de Cartan. Il existe en effet toujours de nombreuses géométries de Cartan associées à une même structure géométrique concrète, et pour obtenir une correspondance bijective, on doit contraindre les connexions de Cartan. Cette condition supplémentaire s'exprime souvent par une condition sur la courbure, dite *condition de normalisation*.

La méthode la plus classique et la plus employée jusqu'à récemment pour résoudre les problèmes d'équivalences consiste à appliquer une sorte de procédure algorithmique découverte par Cartan appelée *méthode d'équivalence de Cartan* et s'exprimant à travers les jauges locales, qui permet de trouver une condition de normalisation et de résoudre le problème d'équivalence. C'est l'un des intérêts des jauges locales. Une autre méthode développée dans une grande généralité pour les structures paraboliques dans [ČapS09, §3.1] est de définir des structures algébriques naturelles au niveau des algèbres de Lie pour résoudre le problème d'équivalence pour une très large classe de géométries de Cartan.

1.4 Problème d'équivalence pour la géométrie des EDO d'ordre 2

Puisque nous venons de voir qu'à toute géométrie de Cartan sans torsion modélée sur $(\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), P_{min})$ on peut associer une structure lagrangienne de contact canonique, il est raisonnable de penser que $(\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), P_{min})$ est le bon espace modèle pour les géométries lagrangiennes de contact, ie que l'on peut inversement associer à toute structure lagrangienne de contact une géométrie de Cartan canonique de modèle $(\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), P_{min})$. Ceci correspond à la résolution du problème d'équivalence pour les structures lagrangiennes de contact en dimension trois, associées aux géométries de Cartan modélées sur $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/P_{min}$. Le théorème 1.4.1 ci-dessous résout ce problème d'équivalence, sous une forme énoncée dans l'article [DK16] de Doubrov et

Komrakov, et démontrée par la méthode des jauges locales.¹¹ Nous reprenons pour cette énoncé les notations du lemme 1.2.8 pour la base standard (e_0, e_α, e_β) du quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\min}$.

Théorème 1.4.1 (Problème d'équivalence pour la géométrie lagrangienne de contact). *Soit (E_1, E_2) une structure lagrangienne de contact sur une variété M de dimension trois. À isomorphisme près, il existe sur M une unique géométrie de Cartan modélée sur le couple $(\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), P_{\min})$ et associée à (E_1, E_2) , et dont la courbure vérifie la condition de normalisation suivante : la fonction de courbure K est à valeurs dans le sous-espace $W \subset \mathrm{End}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\min}), \mathfrak{g})$ de dimension quatre défini de la façon suivante sur la base $(e_\alpha \wedge e_0, e_\beta \wedge e_0, e_\alpha \wedge e_\beta)$ de $\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\min})$:*

$$W = \left\{ e_\alpha \wedge e_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_\beta \wedge e_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_\alpha \wedge e_\beta \mapsto 0 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Cette géométrie de Cartan sera appelée géométrie de Cartan normale associée à la structure lagrangienne de contact (E_1, E_2) .

De plus, les difféomorphismes (respectivement locaux) de M qui préservent la structure lagrangienne de contact (E_1, E_2) sont exactement les isomorphismes (resp. locaux) de la géométrie de Cartan normale associée à (E_1, E_2) .

Enfin, la géométrie de Cartan normale associée à la structure lagrangienne de contact canonique sur l'espace modèle $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2) \cong \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/P_{\min}$ est la géométrie de Cartan plate modèle sur $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})/P_{\min}$.

Remarque 1.4.2. Notons la connexion de Cartan sous la forme : $\omega = (\omega_{i,j})_{i,j} : T\hat{M} \rightarrow \mathfrak{sl}_3$, avec $\omega_{i,j}, 1 \leq i, j \leq 3$ des 1-formes à valeurs réelles sur \hat{M} . Alors la condition de normalisation donnée dans le théorème 1.4.1 est équivalente à demander que la courbure Ω prenne la forme suivante :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & a\omega_{2,1} \wedge \omega_{3,1} & b\omega_{2,1} \wedge \omega_{3,1} + c\omega_{3,2} \wedge \omega_{3,1} \\ 0 & 0 & d\omega_{3,2} \wedge \omega_{3,1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in C^\infty(\hat{M}, \mathbb{R}). \quad (1.4.1)$$

En particulier, on remarque que la condition de normalisation de la courbure impose que la connexion soit sans torsion, ce que l'on savait nécessaire puisque l'on ne sait associer une structure lagrangienne de contact qu'aux géométries de Cartan *sans torsion* modélées sur $(\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), P_{\min})$.

¹¹ Le problème d'équivalence pour les structures lagrangiennes de contact en dimension trois avait déjà été résolu par Élie Cartan par sa *méthode d'équivalence*. Le résultat [ČapS09, Theorem 3.1.14] résout en particulier le problème d'équivalence pour le cas des structures lagrangiennes de contact, mais est beaucoup plus général ; il est prouvé sans utiliser les jauges locales.

2 Flots d'Anosov

Les flots d'Anosov sont un cas particulier de *systèmes dynamiques*, que nous définissons maintenant.

De façon très générale, on peut décrire la théorie des systèmes dynamiques comme une tentative de description et d'étude mathématique des processus évolutifs, et surtout *déterministes* : dont l'état à tout instant futur et passé est entièrement déterminé par l'état présent.

La mécanique classique offre par exemple un cadre théorique adapté à cette seconde hypothèse : des lois y sont énoncées, qui régissent entièrement le mouvement des corps matériels, en fonction de leur position et de leur vitesse (ainsi que de leurs caractéristiques physiques : masse, charge électrique, etc, mais un système physique étant fixé, on peut dans un premier temps supposer ces caractéristiques immuables).

Concrètement, dans le premier « cas d'école » où l'on étudie le mouvement d'un corps *en chute libre*, ie soumis uniquement à l'attraction de la terre, la traduction en équations de la seconde loi de Newton donne l'évolution de la position du corps en fonction du temps, les paramètres de l'équation étant les positions et vitesses initiales. L'« état présent » dont il était question plus haut est donc dans le cas du corps en chute libre (et plus généralement dans le cas des systèmes étudiés par la mécanique classique) la donnée de la position et de la vitesse initiale. Il correspond mathématiquement à 6 paramètres numériques, ou encore à un certain point dans un espace à 6 dimensions, appelé *espace des phases*, qui est l'espace des positions et des vitesses que peut prendre le corps matériel étudié. L'« état » dont on va étudier l'évolution va se traduire mathématiquement par le chemin parcouru dans cet espace des phases au cours du temps (même si la seule donnée qui nous intéresse réellement est la position, la vitesse est une donnée nécessaire à la détermination de l'évolution du système, dont on doit donc également suivre l'évolution).

On peut maintenant traduire l'équation de la chute libre d'une façon que l'on pourrait déjà nommer plus *géométrique*, en considérant plutôt la transformation φ^t qui correspond à l'écoulement d'un temps t : à partir d'un point x quelconque de l'espace des phases, c'est à dire une fois que l'on a fixé les positions et vitesses initiales, l'évolution du système est entièrement déterminée par la seconde loi de Newton, et cette évolution définit donc une transformation de l'espace que l'on nomme φ^t , de sorte que $\varphi^t(x)$ est la position à l'instant t d'un corps partant des positions et vitesses initiales x . Par exemple, dans le cas d'un corps en chute libre, cette transformation φ^t est à tout instant t une translation dans la direction verticale, et vers le bas (à savoir : la pomme tombe vers le sol).

On suppose enfin implicitement que nos systèmes dynamiques « n'ont pas de mémoire » c'est à dire que la loi qui régit leur évolution (dont l'existence est supposée par l'hypothèse de déterminisme) est immuable ; cela se traduit dans l'analogie géométrique de la loi du système dynamique, qui est l'ensemble des transformations φ^t , par la relation :

$$\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}.$$

Nous avons ici vu un premier exemple simple de système dynamique, et nous avons surtout décelé un objet géométrique pertinent qui contient toutes les informations sur ce système : l'ensemble (φ^t) des transformations de l'espace des phases, que l'on appellera le *flot* du système dynamique. Il se trouve que dans de nombreux contextes physiques, l'ensemble des paramètres significatifs est plus compliqué que l'espace euclidien \mathbb{R}^6 à 6 dimensions, et a une géométrie différente. Par exemple on peut vouloir étudier un système dont l'ensemble des paramètres est un cercle, un tore, etc (et le plus souvent ces espaces des phases seront bien plus compliqués!). Des objets géométriques plus généraux, les espaces topologiques et les variétés, apparaissent alors naturellement pour étudier les systèmes dynamiques.

Les cadres mathématiques dans lesquels on peut étudier des systèmes dynamiques sont très divers, et l'unité des systèmes dynamiques vient plutôt de la nature des questions posées : elles seront généralement d'ordre qualitatif et non quantitatif, et plus précisément d'ordre asymptotique, c'est à dire que l'on s'intéressera au comportement des systèmes en temps grand. Grossièrement, on distinguera les systèmes très sensibles à une variation des conditions initiales (que l'on appellera *chaotiques*), et les systèmes résistants aux conditions initiales, dont les premiers exemples sont par exemple les systèmes périodiques. Les *flots d'Anosov*, dont il est question dans ce mémoire, sont un type très riche de systèmes dynamiques, qui combinent ces deux types d'aspects : il passe, aussi proche que l'on veut de tout point, des trajectoires périodiques, et des trajectoires très chaotiques.

L'objectif de cette deuxième partie est de définir ces flots, et d'en donner des premiers exemples. Nous énoncerons à la fin de la partie un théorème qui classe les flots Anosov « les plus réguliers » en dimension trois, et la démonstration de ce théorème sera l'objet de la dernière partie de ce mémoire.

2.1 Définitions et première propriétés

De façon très générale, on peut inclure dans l'étude des *systèmes dynamiques* celle de toutes les actions de groupes, le groupe et l'espace sur lequel il agit étant munis selon les cas de structures topologiques, différentiables, ou mesurables. Il paraît raisonnable de commencer par étudier les actions des deux groupes les plus simples : \mathbb{Z} pour le cas discret, et \mathbb{R} pour le cas continu. Ces deux premiers types d'actions de groupes correspondent à l'idée que l'on se fait d'une « dynamique » comme elle a été introduite précédemment, le groupe \mathbb{Z} correspondant au temps discret, et le groupe \mathbb{R} au temps continu.

Nous nous plaçons directement dans le cadre des systèmes dynamiques différentiables, dans lequel nous resterons tout au long de ce mémoire, mais les notions topologiques que nous introduisons font bien sûr sens pour des systèmes dynamiques de régularité inférieure.

La donnée d'une action lisse du groupe $G = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{R} sur une variété M est équivalente à la donnée du groupe à un paramètre $\{\varphi^t : x \in M \mapsto t \cdot x \in M \mid t \in G\}$ de difféomorphismes de M , que l'on appelle *flot*, et qui vérifie la relation

$$\varphi^{t+t'} = \varphi^t \circ \varphi^{t'} = \varphi^{t'} \circ \varphi^t. \quad (2.1.1)$$

Pour différencier une famille lisse quelconque d'applications et un flot, nous utiliserons tout au long du texte la notation en exposant pour un flot $(\varphi^t)_{t \in G}$. De plus si rien n'est précisé, un flot sera supposé être *continu*, et nous noterons donc parfois simplement (φ^t) pour simplifier les notations, ce qui signifiera que le groupe est $G = \mathbb{R}$, nous préciserons sinon qu'il est *discret*, ie $G = \mathbb{Z}$. Dans le cas discret, le flot est équivalent à la donnée du difféomorphisme $\varphi = \varphi^1$ de M . Dans le cas continu, il est équivalent à la donnée du champ de vecteur $X(p) = \left. \frac{d\varphi^t(p)}{dt} \right|_{t=0}$.

La donnée d'un flot de difféomorphismes d'une variété constitue un *système dynamique* (différentiable).

Définition 2.1.1 (Notions de dynamique topologique). Soit $(\varphi^t)_{t \in G}$ un système dynamique sur une variété M .

Un point $x \in M$ est dit *non-errant* si pour tout voisinage ouvert U de x , et pour tout temps $T > 0$, il existe un temps $t > T$ tel que $\varphi^t(U) \cap U \neq \emptyset$. L'ensemble des points non-errants du flot $(\varphi^t)_{t \in G}$ est noté $NW(\varphi^t) \subset M$ (pour l'anglais « Non-Wandering », qui signifie non-errant). On remarquera en particulier que $NW(\varphi^t)$ est fermé et invariant par le flot.

Un point $x \in M$ est dit *périodique* pour le flot s'il existe un temps $t_0 > 0$ tel que $\varphi^{t_0}(x) = x$.

Le système dynamique $(\varphi^t)_{t \in G}$ est dit *topologiquement transitif* s'il existe un point $x \in M$ dont l'orbite $O(x) := \{\varphi^t(x) \mid t \in G\}$ est dense dans M .

Un flot continu (φ^t) est dit *non singulier* si le champ de vecteurs qui lui est associé ne s'annule pas, ie s'il définit une distribution de rang un : $\mathbb{R} \frac{d\varphi^t}{dt}$ (ou de façon équivalente : si (φ^t) n'a pas d'orbite réduite à un singleton).

La donnée d'un flot continu consiste en l'étude de deux aspects différents de ses orbites : la donnée des orbites dans leur ensemble (ce qui correspond au feuilletage associé au flot), et la paramétrisation de ses orbites (ce qui correspond au choix d'un champ de vecteur engendrant la distribution associée au feuilletage précédent). Le premier aspect contient les informations qualitative sur le comportement relatif des orbites. Si les propriétés auxquelles on s'intéresse sont uniquement qualitatives, les changements de paramétrage ne seront donc pas significatifs. Ceci étant ces questions sont subtiles, ce qui justifie les définitions prudentes qui suivent.

Définition 2.1.2. Deux systèmes dynamiques $(M, (\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}})$ et $(N, (\psi^t)_{t \in \mathbb{R}})$ sont *conjugués* s'il existe un difféomorphisme h de M sur N tel que :

$$h \circ \varphi^t \circ h^{-1} = \psi^t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ils sont dits *orbite-équivalents* s'il existe un difféomorphisme h de M sur N qui envoie les orbites de φ^t sur celles de ψ^t , en préservant l'orientation donnée par la croissance du temps $t \in \mathbb{R}$.

L'un des objectifs de la théorie des systèmes dynamiques est de classier certaines familles de flots, à conjugaison ou orbite-équivalence près. C'est la question à laquelle nous nous intéressons dans ce mémoire, pour un type de flots très étudié que nous définissons maintenant.

Définition 2.1.3 (Flots d'Anosov). Un flot non singulier $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur une variété compacte M est dit *Anosov* s'il existe un scindement $TM = E^0 \oplus E^- \oplus E^+$ du fibré tangent à M , où $E^0 = \mathbb{R} \frac{d\varphi^t}{dt}$ est la direction du flot, et E^-, E^+ sont deux sous-fibrés vérifiant les conditions suivantes :

1. E^- et E^+ sont préservés par $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}} : \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in M, D_x \varphi^t(E^\varepsilon(x)) = E^\varepsilon(\varphi^t(x))$, où $\varepsilon = \pm$;
2. il existe une métrique riemannienne sur M et deux constantes $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$, tel que l'on ait les inégalités suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}_*, \forall v \in E^-, \|D\varphi^t(v)\| \leq C\lambda^t \|v\|, \quad (2.1.2)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_*, \forall v \in E^+, \|D\varphi^{-t}(v)\| \leq C\lambda^t \|v\|. \quad (2.1.3)$$

On appelle E^- le *fibré stable*, et E^+ le *fibré instable*, du flot d'Anosov (φ^t) . Nous noterons $X^0 := \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^t$ le champ de vecteur associé au flot Anosov, et $E^0 = \mathbb{R}X^0$ la direction du flot. On appelle enfin $E^- \oplus E^0$ la *distribution stable faible*, et $E^+ \oplus E^0$ la *distribution instable faible*.

Remarque 2.1.4. 1. On impose que le flot soit *non singulier*, ie qu'il définisse une distribution de rang un sur la variété qui le supporte.

2. La définition de ces flots est due à Anosov dans [Ano69]. L'étude des propriétés dynamiques du flot géodésique sur les variétés à courbure négative (présenté au paragraphe 2.2.1) l'a conduit à chercher la propriété dynamiquement caractéristique vérifiée par ces flots, afin de prouver dans un cadre plus général les propriétés qu'il cherchait à vérifier, à savoir l'existence d'orbites périodiques et la stabilité structurelle (dont il est question plus loin dans ce paragraphe).
3. Par compacité de M , les propriétés de contraction (2.1.2) et de dilatation (2.1.3) sont indépendantes de la métrique choisie (les constantes C et λ peuvent en revanche changer).
4. Les estimations de contraction et de dilatation (2.1.2) et (2.1.3) imposent directement que les fibrés stable et instable sont continus, de dimension localement constante (donc constante si la variété est connexe), et sont uniquement caractérisés par le flot (φ^t) (il suffit d'adapter la preuve de [KHM95, Proposition 6.4.4] au cas des flots), ce qui nous autorise à parler *du* fibré stable ou instable.
5. En revanche, les fibrés stable et instable n'ont en général aucune raison d'être lisses. Nous verrons dans le paragraphe suivant que c'est le cas pour les premiers exemples de flots Anosov (les plus simples), et nous nous intéresserons dans ce mémoire uniquement aux flots qui vérifient cette propriété, pour pouvoir étudier ces flots avec les outils de la géométrie différentielle. Les flots Anosov dont les fibrés stable et instable sont lisses constituent cependant des cas très particuliers, comme le montrera la classification 2.2.21 que nous obtiendrons (en d'autres termes, l'hypothèse de régularité des fibrés stable et instable est très contraignante).
6. On peut se demander si la propriété Anosov est qualitative, ie ne concerne que l'agencement des orbites, ou en d'autres termes si elle est conservée par orbite-équivalence, ie par un changement de paramétrage. Il est prouvé dans [KHM95, Proposition 17.4.5 p.547] que c'est le cas. Ceci répond donc en partie à la question que nous nous posions précédemment : dans le cadre de l'étude des flots Anosov, l'orbite-équivalence est une forme satisfaisante d'équivalence entre systèmes dynamiques puisqu'elle conserve la propriété étudiée. Attention, cela ne veut pas dire pour autant que deux flots Anosov orbite-équivalents sont conjugués. Nous exhiberons par la suite (dans la section 3.6) des flots orbites-équivalents, dont on montrera qu'ils sont non conjugués (grâce à un invariant de conjugaison qui n'est pas un invariant d'orbite-équivalence).

L'illustration 2.1 schématise l'allure locale d'un flot d'Anosov en dimension trois; le sens positif de parcours des orbites est indiqué par les flèches, et la direction stable est la direction verticale, la direction instable la direction horizontale (cette illustration provient de la page web personnelle d'Étienne Ghys).

Une question importante dans la théorie des systèmes dynamiques est celle de la *stabilité* des systèmes étudiés. On peut s'intéresser à deux formes différentes de stabilité. Tout d'abord, les propriétés générales auxquelles on s'intéresse (hyperbolicité, propriétés Anosov ...) sont-elles conservées par un léger changement de la dynamique? Et plus précisément, les propriétés individuelles d'une dynamique donnée sont-elles conservées par un léger changement de la dynamique? Ces questions de stabilité sont reliées à la question de sensibilité d'un système aux paramètres d'origine qui déterminent le système.

Définition 2.1.5. Un système dynamique $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ associé à un champ de vecteurs X est *structurellement stable* si tout champ proche de X dans la topologie C^1 définit un système dynamique orbite-équivalent à φ^t , l'équivalence pouvant être choisie C^0 -proche de l'identité.

Une des raisons de l'intérêt suscité par les flots d'Anosov est leur forte stabilité, ce qu'énonce le théorème ci-dessous, dont on peut trouver une preuve dans [KHM95, Corollary 18.2.4 p.572] (en appliquant la

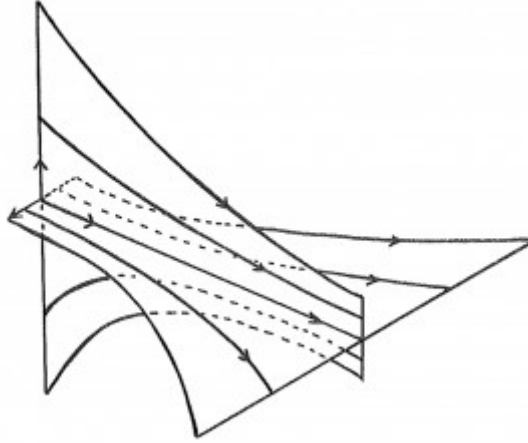


FIGURE 2.1.1 – Allure locale d'un flot Anosov en dimension trois.

proposition [KHM95, Proposition 17.4.5 p.547] déjà citée selon laquelle un flot orbite-équivalent à un flot d'Anosov est lui-même d'Anosov).¹²

Théorème 2.1.6. — *L'ensemble des champs de vecteurs qui définissent un flot d'Anosov est ouvert dans la topologie C^1 .*

— *Tout flot d'Anosov est structurellement stable.*

Puisque les distributions stable et instable d'un flot Anosov ne sont en général pas lisses, le théorème de Frobenius ne permet pas de les étudier et de savoir s'il existe malgré tout des feuilles lisses tangentes à ces distributions. Le théorème ci-dessous, dont on peut trouver une preuve dans [KHM95, Theorem 17.4.3 p.545], est pour cette raison très précieux, et constitue l'un des intérêts importants des systèmes Anosov.¹³

Théorème 2.1.7. *Les distributions E^- et E^+ sont intégrables, au sens où il passe par tout point des sous-variétés connexes lisses immergées injectivement, et tangentes à E^- et E^+ respectivement.*

Puisque nous travaillons en dimension trois, les distributions stable et instable sont de rang 1, et puisqu'on les suppose lisses, elles sont donc nécessairement intégrables ; l'existence des variétés stable et instable est donc immédiate dans les cas qui nous intéressent.

Les flots d'Anosov sont particulièrement riches du point de vue de l'étude de leurs orbites. Une partie importante d'entre eux admet en effet aussi bien des orbites périodiques que des orbites denses, ie admet les deux types opposés de comportement dynamique. L'existence d'orbites périodiques et d'orbites denses sont les seuls résultats spécifiques aux flots d'Anosov que nous utiliserons dans ce mémoire.

Théorème 2.1.8. *Soit φ^t un flot d'Anosov sur une variété compacte M , qui préserve une mesure borélienne (non nulle) sur M . Alors l'ensemble des points périodiques pour le flot φ^t est dense dans M .*

Pour démontrer la densité des points périodiques, on déduit tout d'abord l'égalité $NW(\varphi^t) = M$ du résultat ci-dessous, qui est une forme du théorème de récurrence de Poincaré démontrée dans [KHM95, Theorem 4.1.19 p.142].

Théorème 2.1.9 (Récurrence de Poincaré). *Soit X un espace mesurable muni d'une mesure finie μ , et $f: X \rightarrow X$ une application mesurable préservant μ , ie :*

$$\forall A \subset X \text{ mesurable, } f^* \mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Alors pour toute partie mesurable $A \subset X$: pour μ -presque-tout $x \in A$, $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ intersecte A une infinité de fois.

On applique ensuite le « lemme de pistage » ci-dessous, démontré dans [KHM95, Corollary 18.1.8 p.570].¹⁴

12. La stabilité structurelle a été découverte par Anosov dans son article [Ano69].

13. L'existence des variétés stable et instable est due à Anosov dans [Ano69].

14. La densité des points périodiques dans l'ensemble des points non-errants a été prouvé par Anosov dans [Ano69].

Théorème 2.1.10. *Soit φ^t un flot d'Anosov sur une variété compacte M . L'ensemble des points périodiques pour le flot φ^t est dense dans l'ensemble des points non-errants $NW(\varphi^t)$.*

Nous énonçons maintenant le théorème relatif à l'existence d'orbites denses.

Théorème 2.1.11. *Soit φ^t un flot d'Anosov sur une variété compacte connexe M , qui préserve une mesure borélienne (non nulle) sur M . Alors le flot φ^t est topologiquement transitif.*

Le théorème 2.1.11 est une conséquence de l'égalité $NW(\varphi^t) = M$ évoquée précédemment, et du théorème ci-dessous prouvé dans [PS70, Theorem 2.1 p.151].

Théorème 2.1.12. *L'ensemble $NW(\varphi^t)$ des points non-errants d'un flot Anosov se décompose de manière unique en une union finie et disjointe de fermés invariants par le flot et sur lesquels ce dernier est topologiquement transitif.*

2.2 Exemples, et classification en dimension trois

2.2.1 Premiers exemples

Nous allons maintenant présenter trois familles d'exemples classiques de flots d'Anosov, en insistant sur le cas de la dimension 3.

Suspensions d'automorphismes hyperboliques des tores Un premier type important d'exemples de flots Anosov en dimension quelconque est construit à partir de leur analogue discret, que nous définissons maintenant.

Définition 2.2.1 (Difféomorphismes Anosov). Un difféomorphisme f d'une variété compacte M est dit *Anosov* s'il existe un scindement $TM = E^+ \oplus E^-$ du fibré tangent à M en somme directe de deux sous-fibrés E^- et E^+ , appelés respectivement fibré *stable* et fibré *instable*, vérifiant les deux conditions suivantes :

1. E^+ et E^- sont stables par la différentielle de f : $\forall x \in M, D_x f(E^\varepsilon(x)) = E^\varepsilon(f(x))$, avec $\varepsilon = \pm$;
2. il existe une métrique riemannienne sur M et deux constantes $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$, tel que les vecteurs de E^+ (respectivement E^-) sont exponentiellement dilatés (respectivement exponentiellement contractés) par la différentielle de f :

$$\forall x \in M, \forall n \in \mathbb{N} : \|D_x f^n|_{E^-}\| \leq C\lambda^n, \|D_x f^{-n}|_{E^+}\| \leq C\lambda^n. \quad (2.2.1)$$

Remarques 2.2.2. 1. L'hypothèse (2.2.1) est équivalente à l'existence de deux constantes $0 < \lambda < 1$ et $\mu > 1$ telles que pour tout $x \in M$: $\|D_x f|_{E^-}\| \leq \lambda$ et $\|D_x f^{-1}|_{E^+}\| \leq \mu^{-1}$.

2. Les mêmes remarques que pour le cas des flots s'appliquent : les conditions de contraction et de dilatation sont bien indépendantes du choix de la métrique riemannienne, puisque M est supposée compacte, et ces conditions imposent la continuité des fibrés stable et instable, mais ils ne sont pas nécessairement lisses.

Exemple 2.2.3 (Automorphismes hyperboliques du tore). On appelle *automorphisme hyperbolique du tore* un difféomorphisme du tore $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ défini par un isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^n préservant \mathbb{Z}^n (donc passant au quotient en un difféomorphisme de T^n) et hyperbolique, c'est à dire n'ayant pas de valeur propre complexe de module 1

Lemme 2.2.4. *Un automorphisme hyperbolique de T^n est de type Anosov. De plus son fibré stable (respectivement instable) est l'image par la projection canonique du sous-espace stable (resp. instable) de l'isomorphisme de \mathbb{R}^n qui le définit (ie de la somme des sous-espaces caractéristiques correspondant aux valeurs propres de module < 1 - resp. > 1 -).*

Soulignons qu'un isomorphisme linéaire préservant \mathbb{Z}^n ne peut pas avoir toutes ses valeurs propres de module < 1 ou > 1 (car son déterminant est ± 1), donc il suffit de supposer qu'il n'y a pas de valeur propre de module 1, et aucun des deux fibrés stable ou instable ne sera nul.

Par exemple l'isomorphisme de \mathbb{R}^2 défini dans la base canonique par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ induit un difféomorphisme Anosov sur le tore T^2 .

Démonstration du lemme 2.2.4. Soit $u \in GL(n, \mathbb{R})$ un isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^n . Nous allons montrer qu'il existe une métrique riemannienne sur \mathbb{R}^n invariante par les translations de \mathbb{Z}^n , et un scindement $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$ de \mathbb{R}^n , pour lesquels u vérifie les propriétés de contraction et de dilatation uniformes

des difféomorphismes Anosov. Il est alors clair que le difféomorphisme \bar{u} induit sur T^n est de type Anosov. En effet, en notant $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n \simeq \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ la projection canonique de \mathbb{R}^n sur le tore T^n , une métrique riemannienne invariante par translations sur \mathbb{R}^n induit une métrique g_{plate} sur T^n pour laquelle π est un revêtement riemannien, et l'image du scindement associé à u par $D\pi$ fournit alors un scindement pour \bar{u} vérifiant encore les estimations (2.2.1) puisque π préserve les métriques riemanniennes.

Nous allons prouver l'existence d'une norme euclidienne $\|\cdot\|_1$ adaptée à u au sens suivant : si on note E^- la somme des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de u de module inférieur à 1 appelé *sous-espace stable de u* , et E^+ celle des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de module supérieur à 1 appelé *sous-espace instable de u* , alors en notant encore $\|\cdot\|_1$ la norme d'opérateur associée à $\|\cdot\|_1$, on aura les inégalités

$$\|u|_{E^-}\|_1 < 1, \|u|_{E^+}\|_1 > 1.$$

Les estimations (2.2.1) sont alors vérifiées pour le scindement associé à la somme directe $\mathbb{R}^n = E^- \oplus E^+$, et avec $\lambda = \min(\|u|_{E^-}\|_1, 1/\|u|_{E^+}\|_1)$ et $C = 1$.

Considérons $v = u|_{E^-}$ la restriction de u à son sous-espace stable, et soit $v = d + n$ la décomposition de Jordan de v , où d est diagonale (à valeurs propres complexes) et n nilpotente. En notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne standard sur \mathbb{R}^n , on sait que $\|d\| < 1$ puisque d a toutes ses valeurs propres de module strictement inférieur à 1, donc par continuité, en notant $v(\varepsilon) := d + \varepsilon n$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|v(\varepsilon)\| < 1$. Or puisque $\varepsilon > 0$, $v(\varepsilon)$ a la même forme canonique de Jordan que v , donc est conjuguée à v , ie est la lecture de v dans une nouvelle base \mathcal{B} . Le choix de \mathcal{B} comme base orthonormée définit alors une nouvelle métrique euclidienne $\|\cdot\|_1$ sur \mathbb{R}^n pour laquelle $\|v\|_1 = \|v(\varepsilon)\| < 1$. On trouve de la même façon une base adaptée pour E^+ , et le choix de l'union de ces deux bases comme base orthonormée définit une métrique euclidienne vérifiant les conditions voulues, ce qui termine la preuve du lemme. \square

Définition 2.2.5. Un difféomorphisme d'Anosov (ou un flot d'Anosov) est de *codimension 1* si l'un des deux fibrés stable ou instable est de dimension 1 (en particulier en dimension trois, tout flot d'Anosov est de codimension 1).

Franks prouve dans [Fra70] le théorème suivant :

Théorème 2.2.6. Soit f un difféomorphisme d'Anosov de codimension 1 sur une variété M de dimension n , tel que $NW(f) = M$. Alors f est topologiquement conjugué à un automorphisme hyperbolique du tore T^n .

Un automorphisme hyperbolique f du tore est conjugué à l'origine par le revêtement $\mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ (plus précisément par sa restriction à un voisinage de l'origine) à l'isomorphisme linéaire u de \mathbb{R}^n qui le définit. Or si aucun des deux fibrés stable ou instable n'est nul, tout voisinage de l'origine intersecte l'image dans T^n d'un espace propre associé à une valeur propre de module inférieur à 1 de u , et donc en particulier tout voisinage U de l'origine contient des points dont les orbites sont contenues dans U . Ceci montre que les automorphismes hyperboliques des tores vérifient : $NW(f) = M$. Le théorème suivant de Newhouse, prouvé dans [New70], montre que tous les difféomorphismes Anosov de codimension 1 vérifient en fait cette hypothèse.

Théorème 2.2.7. Soit f un difféomorphisme Anosov de codimension 1 sur une variété M . Alors $NW(f) = M$.

Ces deux résultats montrent finalement que :

Corollaire 2.2.8. Tout difféomorphisme Anosov de codimension 1 est topologiquement conjugué à un automorphisme hyperbolique d'un tore.

Les difféomorphismes Anosov en codimension 1 sont donc entièrement compris, et toutes les possibilités sont couvertes par le cas des automorphismes hyperboliques des tores.

Définition 2.2.9. Soit f un difféomorphisme d'une variété M . La suspension de la variété M par f , notée M_f , est la variété obtenue à partir du produit $M \times [0; 1]$ en identifiant les paires de points de la forme $(f(x), 0)$ et $(x, 1)$, pour $x \in M$ (pour se convaincre que sa structure de variété est bien définie, on peut également voir M_f comme le quotient de $M \times \mathbb{R}$ par l'action de \mathbb{Z} définie par $k \cdot (x, t) = (f^{-1}(x), t + k)$). C'est un fibré sur le cercle S^1 , de fibre difféomorphe à M (en particulier, M_f est compacte si et seulement si M l'est). La *suspension* de f est le flot défini sur M_f par le champ de vecteur $\frac{\partial}{\partial t}$ (qui passe au quotient sur M_f).

Le lemme suivant est une façon commode de construire des flots Anosov à partir de difféomorphismes Anosov.

Lemme 2.2.10. *Si f est un difféomorphisme Anosov d'une variété compacte M , alors la suspension de f sur M_f est un flot Anosov.*

Démonstration. On note E^+ et E^- les fibrés stable et instable de f , et \bar{E}^-, \bar{E}^+ les uniques relevés de ces fibrés contenus dans les fibres de la projection $M_f \rightarrow S^1$. On va montrer que \bar{E}^+ et \bar{E}^- sont les fibrés stable et instable de la suspension de f , que l'on note (φ^t) .

On voit M_f comme le quotient de $M \times [0; 1]$ par l'action de \mathbb{Z} définie par $1 \cdot (x, u + 1) = (f(x), u)$, on note $[x, u]$ la classe de $(x, u) \in M \times \mathbb{R}$ dans M_f , et on identifie en tout point $[x, u]$ l'espace tangent à M_f avec le produit $T_x M \times \mathbb{R}$. Le revêtement $\pi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M_f$ induit un difféomorphisme local en restriction aux ouverts de la forme $M \times I$ avec I un intervalle de longueur inférieure à 1. Le flot φ^t vaut $\varphi^t[x, u] = [x, u + t]$, et donc dans une section de π définie sur un voisinage $\{[y, s] \mid y \in M, s \in [u; u + 1]\}$ de $[x, u]$ dans M_f et envoyant $[x, u]$ sur (x, u) , φ^t se lit comme :

$$\varphi^t(x, u) = (f^{\lfloor t \rfloor}(x), u + t - \lfloor t \rfloor). \quad (2.2.2)$$

Soit g une métrique riemannienne sur M_f , et en notant pour tout $t: M \hookrightarrow M_f$ l'inclusion de M dans M_f comme fibre de t , soit g^t le tiré en arrière de g sur M par i_t . On notera pour v un vecteur tangent $\sqrt{g(v, v)} = \|v\|$ et $\sqrt{g^t(v, v)} = \|v\|^t$. Soit $(x, u) \in M \times [0; 1]$, $v \in E^-([x, u])$, et $t > 0$. Selon la forme (2.2.2) de la lecture dans une section locale de φ^t en $[x, u]$, et puisque f est un difféomorphisme Anosov, il existe des constantes $C_{t-\lfloor t \rfloor+u} > 0$ et $\lambda_{t-\lfloor t \rfloor+u} < 1$ telles que :

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_{[x, u]} \varphi^t((v, 0))\| &= \|\mathbb{D}_x f^{\lfloor t \rfloor}(v), 0\| \\ &= \left\| \mathbb{D}_x f^{\lfloor t \rfloor}(v) \right\|_{f^{\lfloor t \rfloor}(x)}^{t-\lfloor t \rfloor+u} \\ &\leq C_{t-\lfloor t \rfloor+u} \lambda_{t-\lfloor t \rfloor+u}^{\lfloor t \rfloor} \|v\|_{f^{\lfloor t \rfloor}(x)}^{t-\lfloor t \rfloor+u} \\ &\leq C \lambda^t \|(v, 0)\| \end{aligned}$$

où $\lambda = \max_{s \in [-1; 2]} \lambda_s < 1$ et $C = \max_{s \in [-1; 2]} C_s e^{\lambda s} / \lambda > 0$ sont des constantes bien définies par compacité. En faisant de même pour les vecteurs du fibré instable E^+ , on en conclut que les fibrés \bar{E}^- et \bar{E}^+ vérifient bien les conditions de contraction et de dilatation uniforme des flots Anosov. \square

Exemple 2.2.11. Le lemme 2.2.10 fournit un premier exemple de flots Anosov donné par les suspensions d'automorphismes hyperboliques des tores.

Remarque 2.2.12. Le preuve du lemme 2.2.10 montre en particulier que la somme $E^+ \oplus E^-$ des distributions stable et instable de la suspension d'un difféomorphisme Anosov f sur une variété compacte M est intégrable, puisque les fibres de la projection $M_f \rightarrow S^1$ sont des sous-variétés intégrales de $E^+ \oplus E^-$.

Flot hyperbolique sur les quotients compacts de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ Nous présentons maintenant des exemples entièrement algébriques de flots Anosov sur les quotients compacts de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, revêtement universel de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Nous adopterons à partir de maintenant les notations suivantes.

Notations 2.2.13 (Notations dans les groupes de Lie d'algèbres de Lie \mathfrak{sl}_2 et dans leurs quotients). Nous notons :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.3)$$

et appellera le triplet (E, F, H) la *base standard* de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2 = \mathrm{Lie}(\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}))$. Ce triplet vérifie les relations :

$$[H, E] = 2E, [H, F] = -2F, [E, F] = H. \quad (2.2.4)$$

On notera de plus dans tous les groupes quotients $\Gamma \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ par un sous-groupe discret de son centre Z (donc en particulier dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$) :

$$A = (a^t)_t = (\exp(tH))_t \quad (2.2.5)$$

le sous-groupe à un paramètre engendré par H . De façon plus générale, si Γ est un sous-groupe discret quelconque de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, on notera encore a^t le flot des translations à droites par les éléments du sous-groupe à un paramètre défini précédemment, et on appellera ce flot le *flot hyperbolique standard* sur $\Gamma \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$.

Proposition 2.2.14. *Soit Γ un sous-groupe discret cocompact de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$. Alors le flot hyperbolique standard (a^t) sur $\Gamma \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ est de type Anosov.*

Remarque 2.2.15. En particulier, si G est l'un des groupes de Lie connexes d'algèbre de Lie \mathfrak{sl}_2 , par exemple $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ou $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, G est un quotient de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ par un sous-groupe discret de son centre, donc le flot (a^t) est également Anosov sur tout quotient compact de G .

Démonstration de la proposition 2.2.14. Notons \tilde{E} et \tilde{F} les champs de vecteurs invariants à gauche sur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ tels que $\tilde{E}(e) = E$ et $\tilde{F}(e) = F$, et E^-, E^+ les distributions de rang 1 qu'ils définissent sur $\Gamma \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$. Nous allons montrer que E^- et E^+ sont les distributions stable et instable de (a^t) . On munit $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ de la métrique riemannienne invariante à gauche obtenue à partir de la norme euclidienne de \mathfrak{sl}_2 pour laquelle la base standard (E, F, H) est orthonormée, et on munit $\Gamma \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ de cette métrique passée au quotient, de sorte que $\pi: \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ est un revêtement riemannien. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$. Puisque la métrique sur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ est invariante à gauche et puisque les translations à droite par les a^t commutent avec les translations à gauche L_x , on a pour tout $x \in \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$: $\|D_x a^t(\tilde{E}(x))\| = \|D_{a^t L_x} \circ D_e a^t(E)\| = \|Ad(a^{-t})(E)\| = \|\exp(ad(-tH))(E)\|$, où on note Ad et ad les représentations adjointes sur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ et \mathfrak{sl}_2 respectivement. Or dans la base propre (E, F, H) , $ad(-tH) = \mathrm{Diag}(-2t, 2t, 0)$ et donc $\exp(ad(-tH)) = \mathrm{Diag}(e^{-2t}, e^{2t}, 1)$, donc finalement $\|D_x a^t(\tilde{E}(x))\| = e^{-2t}$, et par les mêmes calculs on a $\|D_x a^t(\tilde{F}(x))\| = e^{2t}$. Ceci montre bien que E^- et E^+ vérifient les conditions de dilatation et de contraction des flots Anosov, puisque π est un revêtement riemannien. \square

Flot géodésique des variétés riemanniennes à courbure négative Le troisième et dernier exemple que nous présentons est celui du flot géodésique sur les variétés riemanniennes compactes à courbure négative. Historiquement, c'est le premier exemple de flots Anosov ; c'est même pour ainsi dire pour et grâce à ces flots que la notion a vu le jour, puisque c'est pour les étudier qu'Anosov a introduit pour la première fois la notion de flots désormais appelés Anosov, dans l'article fondateur [Ano69].

Puisque l'équation des géodésiques d'une variété riemannienne (M, g) est d'ordre 2, ou d'un point de vue plus géométrique, puisqu'une géodésique n'est pas seulement déterminée par son point de départ mais également par sa direction, la donnée des géodésiques ne définit pas un flot sur (M, g) : par un point de M passe plusieurs géodésiques. Le relevé des géodésiques au fibré unitaire tangent est en revanche exactement ce qu'il faut pour définir un flot ; on considère l'évolution de la position et de la vitesse le long d'une géodésique, en d'autres termes on étudie les géodésiques dans l'« espace des phases » de la variété riemannienne.

Définition 2.2.16. Soit (M, g) une variété riemannienne, dont on note UM le fibré unitaire tangent, et $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ la carte exponentielle en un point p . Pour tout point $(p, v) \in UM$, on note $G^t(p, v) := (\exp_p(tv), D_0 \exp_p(tv))$. On définit ainsi un flot $(G^t)_t$ sur UM que l'on appelle *flot géodésique* de (M, g) .

L'étude dynamique des flots géodésiques sur les variétés riemanniennes à courbure négative est un sujet de recherche très riche ; en particulier les propriétés des flots Anosov vues au paragraphe précédent : existence de variétés stables et instables, existence d'orbites périodiques et transitivité, peuvent être prouvées directement dans le cas des surfaces hyperboliques par des arguments de géométrie riemannienne (voir [KHM95, Proposition 5.4.13, Theorem 5.4.14, Theorem 5.4.15]). Savoir que les flots géodésiques sur les variétés à courbure négative sont Anosov nous apprend cependant bien plus, on en déduit par exemple qu'ils sont structurellement stables (ce qui était l'une des motivations principales d'Anosov). On peut trouver une preuve du théorème ci-dessous dans [KHM95, Theorem 17.6.2].

Théorème 2.2.17. *Le flot géodésique d'une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle partout strictement négative est Anosov.*

La preuve de ce théorème nécessite tout d'abord la définition d'une métrique riemannienne naturelle sur le fibré tangent à une variété riemannienne, appelée *métrique de Sasaki* (voir [GHL04, §2.B.6]), puis de prouver des estimations sur les champs de Jacobi d'une variété riemannienne (qui sont les champs définis par les variations géodésiques infinitésimales d'une géodésique) en fonction de sa courbure sectionnelle. Ceci est assez technique et nous ne le ferons pas ici. Nous allons en revanche nous ramener dans le cas de la dimension 2 à un exemple que nous avons déjà traité à la proposition 2.2.14, en montrant que le flot géodésique d'une surface hyperbolique compacte est conjugué au flot hyperbolique standard sur un quotient compact de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

On utilise le modèle du demi-espace $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \equiv \{x + iy \in \mathbb{C}^2 \mid y > 0\}$ de l'espace hyperbolique en dimension 2, muni de la métrique $g_{\mathbb{H}^2} := g_{eucl}/y^2$. L'action par homographies de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{H}^2 se fait par des isométries préservant l'orientation, est homogène, et de noyau $\{\pm id\}$, de sorte que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ se plonge dans l'ensemble $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ des isométries de \mathbb{H}^2 qui préservent son orientation, et agit transitivement sur \mathbb{H}^2 . De plus le stabilisateur de i dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est $\mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$.

Lemme 2.2.18. *L'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{H}^2 induit une action simplement transitive de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathrm{U}\mathbb{H}^2$.*

Démonstration. Puisque $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}(i) = \mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$, et que les différentielles des homographies de $\mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$ agissent transitivement sur les vecteurs tangents unitaires en i , l'action des différentielles de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathrm{U}\mathbb{H}^2$ est bien transitive. Montrons maintenant qu'elle est libre. Soit $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, et supposons que sa classe $[g]$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ fixe un point $(p, v) \in \mathrm{U}\mathbb{H}^2$. Puisque g est une isométrie, pour w un vecteur tangent en p orthogonal à v , $D_p g(w)$ est orthogonal à $D_p g(v) = v$ et de norme 1, de plus la base (v, w) a la même orientation que $(v, D_p g(w))$ car g préserve l'orientation, donc finalement $D_p g(w) = w$ puisqu'on est en dimension 2. Donc la différentielle de g fixe un repère orthonormé, ie est égale à l'identité, et fixe également le point p par hypothèse, or les isométries d'une variété riemannienne connexe qui fixent un point et dont la différentielle en ce point est égale à l'identité sont égales à l'identité (en utilisant la conjugaison par la carte exponentielle), donc $g = id$. Ceci montre que l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathrm{U}\mathbb{H}^2$ est libre. \square

L'application orbitale au point-base $o := (i, (0, 1))$ (où on identifie $\mathrm{T}\mathbb{H}^2$ à $\mathbb{H}^2 \times S^1$) définie par :

$$\theta: g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \mapsto g \cdot o \in \mathrm{U}\mathbb{H}^2 \quad (2.2.6)$$

est donc un difféomorphisme équivariant pour l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ par homographies sur $\mathrm{U}\mathbb{H}^2$ et par translations à gauche sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Un argument de symétrie montre que la géodésique passant par le point base o est la droite verticale de \mathbb{H}^2 passant par o ¹⁵, et puisqu'une géodésique a une norme constante, on déduit finalement que la géodésique paramétrée passant par o est : $(e^t i)_t = (a^{t/2} \cdot i)_t$, où a^t est le flot diagonal $a^t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$, de sorte que le flot hyperbolique est : $G^t(o) = a^{t/2} \cdot o$. Puisque l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est isométrique, pour $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ on a $G^t(g \cdot o) = g \cdot G^t(o)$, et par équivariance de l'application orbitale on en déduit :

$$\theta^{-1} \circ G^t \circ \theta = R_{a^{t/2}}. \quad (2.2.7)$$

Si S est une surface riemannienne compacte connexe et orientable, à courbure sectionnelle constante égale à -1 , alors S est en particulier complète, et on en déduit que le revêtement universel riemannien de S est \mathbb{H}^2 . Puisque $\pi_1(S)$ agit par isométries de \mathbb{H}^2 préservant l'orientation, on en déduit finalement que S est isométrique à un quotient de \mathbb{H}^2 par un sous-groupe discret cocompact Γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ (voir par exemple [GHL04, Theorem 3.82] pour plus de détails).

Proposition 2.2.19. *Soit (S, g) une surface riemannienne compacte connexe et orientable, à courbure sectionnelle constante égale à -1 , et Γ le sous-groupe discret cocompact de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que S est isométrique à $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$. Alors le flot géodésique de (S, g) est conjugué au flot de translations à droite $(R_{a^{t/2}})_t$ par les matrices diagonales de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. En particulier, le flot géodésique de (S, g) sur US est de type Anosov.*

Démonstration. On suppose désormais que S est le quotient de \mathbb{H}^2 par Γ , et on note G^t et G_S^t les flots géodésiques respectifs de \mathbb{H}^2 et de S . Le revêtement universel $p: \mathbb{H}^2 \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ de S induit un revêtement $Dp: \mathrm{U}\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathrm{U}(\Gamma \backslash \mathbb{H}^2) \equiv \Gamma \backslash \mathrm{U}\mathbb{H}^2$, et puisque p est une isométrie riemannienne locale, on a : $Dp \circ G^t = G_S^t \circ Dp$. Par ailleurs, l'application orbitale θ définie par (2.2.6) induit un difféomorphisme $\bar{\theta}: \Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{U}(\Gamma \backslash \mathbb{H}^2) \equiv \Gamma \backslash \mathrm{U}\mathbb{H}^2$. Pour tout $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, on a alors selon la relation de conjugaison (2.2.7) et la conjugaison des flots géodésiques G^t et G_S^t par Dp : $G_S^t \circ \bar{\theta}([g]) = G_S^t \circ Dp \circ \theta(g) = Dp \circ \theta(g a^{t/2}) = \bar{\theta}(R_{a^{t/2}}(g))$. Ceci termine la preuve car le flot hyperbolique $(R_{a^{t/2}})_t$ sur $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est Anosov selon la proposition 2.2.14. \square

Remarque 2.2.20. Tous les exemples de flots Anosov présentés dans cette section ont la même particularité : leurs fibrés stable et instable sont lisses. Pour le cas des suspensions d'automorphismes hyperboliques des tores, les fibrés stable et instable sont en effet égaux à la projection par le revêtement $\mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ des sous-espaces vectoriels stable et instable des isomorphismes linéaires qui les définissent, et dans le cas du flot hyperbolique standard sur les quotients $\Gamma \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, on a vérifié qu'ils sont égaux à la projection des champs invariants à gauche associés à la base standard de \mathfrak{sl}_2 .

15. En effet, l'ensemble des points fixes d'une isométrie riemannienne est une sous-variété totalement géodésique, une sous-variété totalement géodésique de dimension 1 est simplement une géodésique non paramétrée, et la conjugaison complexe restreinte à \mathbb{H}^2 fournit alors l'isométrie voulue.

2.2.2 Classification en dimension trois

Nous avons vu dans le paragraphe précédent des premiers exemples, les plus classiques, de flots Anosov, dont les fibrés stable et instable sont lisses. Nous allons maintenant nous restreindre à l'étude des flots Anosov dont les fibrés stable et instable sont lisses en dimension trois, et nous allons montrer que les exemples du paragraphe précédent couvrent presque tous les cas possibles à orbite-équivalence près, c'est à dire quitte à changer le paramétrage.

Théorème 2.2.21. *Soit (φ^t) un flot d'Anosov lisse sur une variété M de dimension trois, compacte connexe et orientable. Si les fibrés stable et instable de (φ^t) sont tous deux lisses, alors :*

- *soit (φ^t) est conjugué à une suspension d'un automorphisme hyperbolique du tore T^2 ;*
- *soit (φ^t) est orbite-équivalent au flot hyperbolique standard (a^t) sur un quotient $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$, où $\tilde{\Gamma}$ est un sous-groupe discret cocompact de $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$.*

Ce théorème est dû à Ghys dans [Ghy87].

3 Preuve de la classification en dimension trois

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette partie, nous nous plaçons dans les hypothèses du théorème 2.2.21 et nous en adoptons les notations.

Si cela n'est pas précisé, M est donc une variété de dimension trois, compacte, connexe et orientable, et (φ^t) est un flot d'Anosov sur M dont les fibrés stable et instable sont lisses.

Cette dernière partie est consacrée à une preuve du théorème 2.2.21, dont la structure est la suivante.

Nous montrons tout d'abord dans le paragraphe 3.1 que si le flot Anosov (φ^t) n'est pas une suspension d'un automorphisme hyperbolique du tore, alors il définit une $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2))$ -structure sur M . Ghys utilise pour cela le point de vue de la géométrie des EDO d'ordre 2, et montre qu'un invariant de cette géométrie s'annule ; nous utilisons ici le point de vue des géométries de Cartan, et l'équivalence donnée par le théorème 1.4.1 entre structure lagrangienne de contact en dimension trois et géométrie de Cartan normale modélée sur le couple $(\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), P_{min})$. Dans ce contexte, l'argument est tout à fait analogue à celui de la preuve d'origine : nous montrerons que la courbure de cette géométrie de Cartan s'annule, pour en déduire que c'est une $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2))$ -structure sur M .

Le reste de la démonstration constitue l'essentiel, et se passe entièrement dans le cadre des (G, X) -structures. La première étape est la réduction de la structure obtenue ; on montre dans le paragraphe 3.2 que son groupe d'holonomie est contenu dans le centralisateur d'un flot de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$, on distingue trois cas possibles à conjugaison près pour un tel flot, et on élimine le premier de ces trois cas. Nous montrons ensuite dans le paragraphe 3.3 que dans les deux derniers cas, la (G, X) -structure obtenue devrait être complète, puis dans le paragraphe 3.4 que dans le second cas, il n'existe pas de quotient compact, ce qui nous ramène au troisième cas. On conclut enfin dans le paragraphe 3.5 en précisant la topologie de la variété qui supporte le flot, et en se ramenant à un espace homogène $\Gamma \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$.

3.1 Une géométrie de Cartan à courbure nulle

On montre d'abord que si le flot Anosov (φ^t) n'est pas une suspension, alors c'est un *flot Anosov de contact*.

Définition 3.1.1. On dit qu'un flot d'Anosov φ^t sur une variété M est *de contact* si ses deux distributions stable et instable sont lisses, et si la donnée de ces deux distributions définit une structure lagrangienne de contact sur M .

Proposition 3.1.2. *Soit (φ^t) un flot d'Anosov lisse sur une variété compacte et connexe M de dimension trois. Si les deux fibrés stable et instable sont lisses, alors deux cas sont possibles :*

- soit (φ^t) est conjugué à une suspension d'un automorphisme hyperbolique du tore T^2 ;
- soit (φ^t) est un flot Anosov de contact, et dans ce cas le flot préserve une mesure borélienne (non nulle) sur M .

Démonstration. Selon le lemme 1.1.7, puisque la distribution $\mathbb{R}X^0$ tangente au flot Anosov est en somme directe avec la distribution $E^+ \oplus E^-$, il existe une 1-forme α ne s'annulant pas qui engendre $E^+ \oplus E^-$ sur tout M . La 3-forme $\alpha \wedge d\alpha$ définit une mesure borélienne finie, absolument continue par rapport à une mesure à densité quelconque sur M , et invariante par le flot. Selon le théorème 2.1.11, le flot φ^t est donc topologiquement transitif, et selon [KHM95, Theorem 20.4.1 p.638] (plus précisément sa contraposée dans le cas des flots, voir [KHM95, exercice 20.4.1 p.642]), φ^t admet donc finalement une 3-forme volume lisse préservée ω . Alors $\alpha \wedge d\alpha = f\omega$, avec f une fonction lisse, et puisque ω et $\alpha \wedge d\alpha$ sont toutes deux préservées par le flot, f l'est aussi. Or le flot φ^t admet une orbite dense selon le théorème 2.1.11, donc finalement f est constante. Par suite $\alpha \wedge d\alpha$ est soit identiquement nulle, soit partout non-nulle.

Dans le premier cas, $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$ donc $E^+ \oplus E^-$ est intégrable selon la proposition 1.1.10. Il est alors prouvé dans [Pla72, Theorem 3.7] que (φ^t) est conjugué à une suspension d'un automorphisme hyperbolique du tore. Le schéma de cette preuve est le suivant. Il est tout d'abord prouvé dans [Pla72, Theorem 3.1] que si $E^+ \oplus E^-$ est intégrable, alors (φ^t) admet une *section* S lisse, ie une sous-variété S compacte, transverse au flot, et rencontrée par chaque orbite. On en déduit que M supporte la suspension d'un difféomorphisme Anosov (car (φ^t) est orbite-équivalent, mais à priori pas nécessairement conjugué, à une suspension d'un difféomorphisme Anosov défini sur la section S). Or selon deux résultats successifs de Newhouse [New70] et de [Fra70], un difféomorphisme Anosov de *codimension 1*, c'est à dire dont le fibré stable ou instable est de rang 1 (ce qui est bien notre cas ici), est conjugué à un automorphisme hyperbolique du tore ; donc finalement M est diféomorphe à une suspension du tore par un automorphisme hyperbolique, ce qui permet

de prouver ([Pla72, Theorem 3.2, Lemma 3.3]) que $H^1(M; \mathbb{R})$ est de rang 1. Cette hypothèse sur le rang de $H^1(M; \mathbb{R})$ impose que les feuilles de la distribution $E^+ \oplus E^-$ sont compactes ([Pla72, Theorem 2.4]). On en déduit cette fois que (φ^t) est conjugué à la suspension d'un certain temps $\varphi^{t_0}|_{\mathcal{F}}$ du flot en restriction à une feuille (compacte) \mathcal{F} de $E^+ \oplus E^-$, et selon le théorème de Franks-Newhouse, φ^{t_0} est donc conjugué à un automorphisme hyperbolique du tore.

Le second cas : $\alpha \wedge d\alpha$ ne s'annule pas, signifie que $E^+ \oplus E^-$ est une distribution de contact, ce qui termine la preuve de la proposition. \square

La seule situation non classifiée qui reste à étudier est donc celle des flots Anosov de contact.

Nous supposons à partir de maintenant et jusqu'à la fin de la section 3 que l'on est dans le second cas de la proposition 3.1.2, ie que φ^t est un flot Anosov de contact.

Remarque 3.1.3 (Nécessité de l'hypothèse de régularité des fibrés stable et instable). L'hypothèse de régularité faite sur les fibrés stable et instable du flot Anosov est fondamentale : c'est elle qui nous permet de ramener un problème issu des systèmes dynamiques dans le domaine de la géométrie différentielle, en étudiant une structure lagrangienne de contact.

Selon l'équivalence 1.4.1, le flot (φ^t) définit donc sur M une unique géométrie de Cartan \mathcal{C} (à isomorphisme près) modelée sur $(\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), P_{min})$ qui soit associée à la structure lagrangienne de contact définie par le flot et qui soit normale, ie qui vérifie les deux conditions suivantes :

- la structure lagrangienne de contact α - β canonique (E_M^α, E_M^β) définie par la géométrie de Cartan \mathcal{C} (voir la définition 1.3.45) est égale à (E^+, E^-) ;
- \mathcal{C} vérifie la condition de normalisation donnée dans le théorème 1.4.1.

De plus selon le théorème 1.4.1 à nouveau, pour tout temps $t \in \mathbb{R}$, puisque φ^t est un automorphisme de la structure lagrangienne de contact $(E^+, E^-) = (E_M^\alpha, E_M^\beta)$, c'est également un automorphisme de la géométrie de Cartan normale \mathcal{C} qui lui est associée.

Notons $\pi: \hat{M} \rightarrow M$ le P_{min} -fibré principal de la géométrie de Cartan normale sur M , $\omega: \hat{M} \rightarrow \mathfrak{sl}_3$ sa connexion de Cartan, Ω sa courbure, et K sa fonction de courbure (voir le paragraphe 1.3.2 pour les définitions concernant les géométries de Cartan).

Proposition 3.1.4. *Soit (φ^t) un flot Anosov de contact sur une variété compacte et connexe M . La géométrie de Cartan normale associée à φ^t est plate, ie est définie par une $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2))$ -structure sur M , dont les distributions E_M^α et E_M^β coïncident avec la structure lagrangienne de contact définie par le flot.*

Remarque 3.1.5. Concrètement, cela veut dire que l'application développante de la $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2))$ -structure associée à φ^t envoie le tiré en arrière de la distribution instable (respectivement stable) du revêtement universel de M , sur la distribution E^α (respectivement E^β) de $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$.

Démonstration. Puisque nous sommes dans le second cas de la proposition 3.1.2, le flot préserve une mesure borélienne non nulle, finie car M est compacte, et donc selon le théorème 2.1.8, l'ensemble des points périodiques pour le flot est dense dans M . Pour x un point périodique du flot, et $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$, il suffit par densité des points périodiques de montrer que la courbure s'annule en \hat{x} . Soit $t_0 > 0$ tel que $\varphi^{t_0}(x) = x$. Aucune confusion n'étant possible, et pour éviter d'alourdir les notations, on note à partir de maintenant $\varphi = \varphi^{t_0}$, et on note $\hat{\varphi}$ le relevé au fibré principal de l'automorphisme φ de la géométrie de Cartan. Puisque $\hat{\varphi}$ est un automorphisme du fibré principal, il existe $p \in P_{min}$ tel que

$$\hat{\varphi}(\hat{x}) = \hat{x} \cdot p^{-1}.$$

On appelle p l'*holonomie* de l'automorphisme φ en \hat{x} , c'est lui qui va nous permettre de montrer que la courbure de la géométrie est nulle en \hat{x} . Puisque $\hat{\varphi}$ est un automorphisme de la géométrie, il préserve la fonction de courbure selon la propriété 1.3.41, donc par équivariance de la fonction de courbure (voir encore 1.3.41), on a :

$$K(\hat{x}) = K(\hat{\varphi}(\hat{x})) = K(\hat{x}) \cdot p^{-1} = p \cdot K(\hat{x}). \quad (3.1.1)$$

Notre objectif est donc de montrer que le seul point fixe possible de l'holonomie p dans l'espace vectoriel $\mathrm{End}(\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3/\mathfrak{p}_{min}), \mathfrak{sl}_3)$ est l'application nulle.

Puisque φ est un automorphisme du fibré, on a la relation de commutation $(D_{\hat{x} \cdot p^{-1}} \pi)^{-1} \circ D_x \varphi = D_{\hat{x}} \hat{\varphi} \circ (D_{\hat{x}} \pi)^{-1}$, et puisque $\hat{\varphi}$ préserve de plus la connexion de Cartan, on a également $\omega_{\hat{x} \cdot p^{-1}} \circ D_{\hat{x}} \hat{\varphi} = \omega_{\hat{x}}$. En

utilisant les identifications $i_{\hat{x}} = \overline{\omega_{\hat{x}}} \circ (\overline{D_{\hat{x}}\pi})^{-1}$ entre $T_x M$ et $\mathfrak{sl}_3/\mathfrak{p}_{\min}$ définies à la proposition 1.3.37, on a donc finalement $i_{\hat{x}, p^{-1}} \circ D_x \varphi = i_{\hat{x}}$. Grâce à la relation d'équivariance $i_{\hat{x}, p^{-1}} = \overline{Ad}(p) \cdot i_{\hat{x}}$ (voir 1.3.37 à nouveau), on obtient finalement la relation de conjugaison suivante

$$i_{\hat{x}} \circ D_x \varphi \circ (i_{\hat{x}})^{-1} = \overline{Ad}(p^{-1}); \quad (3.1.2)$$

où $\overline{Ad}: P_{\min} \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{sl}_3/\mathfrak{p}_{\min})$ est la représentation adjointe restreinte à P_{\min} , et passée au quotient au but. Par hypothèse, la géométrie de Cartan étudiée est associée à la structure lagrangienne de contact définie par le flot Anosov, ce qui signifie qu'il existe une base (v_0, v_+, v_-) de l'espace tangent en x à M , constituée d'un vecteur v_0 tangent à la direction du flot, et d'un vecteur v_+ (respectivement v_-) tangent à la direction instable (resp. stable), qui vérifient les relations : $i_{\hat{x}}(v_0) = e_0, i_{\hat{x}}(v_+) = e_\alpha, i_{\hat{x}}(v_-) = e_\beta$ (en reprenant la base standard (e_0, e_α, e_β) du modèle $\mathfrak{sl}_3/\mathfrak{p}_{\min}$ définie à la page 12). Enfin, selon la définition d'un flot Anosov, la matrice de l'endomorphisme $D_x \varphi$ de $T_x M$ dans la base (v_0, v_+, v_-) , qui est égale à celle de $\overline{Ad}(p^{-1})$ dans la base (e_0, e_α, e_β) selon la relation de conjugaison (3.1.2), est de la forme diagonale suivante :

$$\text{Mat}(\overline{Ad}(p^{-1})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \quad (3.1.3)$$

où $|\lambda| > 1$. Nous allons en déduire des informations sur l'holonomie que nous écrivons sous sa forme générique $p = \begin{pmatrix} x & t & v \\ 0 & 1/xz & u \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. La matrice de l'action adjointe d'un tel élément générique dans la base (e_0, e_α, e_β) est :

$$\text{Mat}(\overline{Ad}(p)) = \begin{pmatrix} x^{-1}z & 0 & 0 \\ x^{-1}u & 1/x^2z & 0 \\ -z^2t & 0 & xz^2 \end{pmatrix}, \quad (3.1.4)$$

et la relation (3.1.3) impose donc : $t = u = 0, x = z$, et $|x| \neq 1$.

Pour exploiter la relation (3.1.1), il nous faut maintenant calculer l'action à gauche d'un élément de la forme $p = \begin{pmatrix} x & 0 & v \\ 0 & 1/x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ sur une application linéaire $\phi \in W \subset \text{End}(\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3/\mathfrak{p}_{\min}), \mathfrak{sl}_3)$ appartenant au sous-espace W dans lequel la courbure prend ses valeurs (défini au théorème 1.4.1). Supposons que ϕ soit définie sur la base standard de la façon suivante :

$$\phi: e_\alpha \wedge e_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_\beta \wedge e_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_\alpha \wedge e_\beta \mapsto 0;$$

on vérifie alors en utilisant l'action de P_{\min} sur $\text{End}(\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3/\mathfrak{p}_{\min}), \mathfrak{sl}_3)$ définie à la propriété 1.3.41 que l'application $p \cdot \phi$ est de la forme :

$$p \cdot \phi: e_\alpha \wedge e_0 \mapsto x^5 \begin{pmatrix} 0 & ax & b/x^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_\beta \wedge e_0 \mapsto 1/x^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & cx \\ 0 & 0 & d/x^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_\alpha \wedge e_\beta \mapsto 0.$$

Puisque $x \neq 1$, on en déduit que l'unique point fixe de l'holonomie p est l'application nulle, ie que la courbure de la géométrie en \hat{x} est nulle, ce qui termine la preuve. \square

Notation 3.1.6. Nous appellerons simplement $(\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\text{TR}P^2))$ -structure associée à (φ^t) la structure définie par un flot Anosov de contact (φ^t) dont la proposition 3.1.4 montre l'existence.

3.2 Première réduction de la $(\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\text{TR}P^2))$ -structure

Nous commençons par introduire quelques notations que nous utiliserons tout au long de la démonstration.

Notations 3.2.1 $((\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\text{TR}P^2))$ -structure associée à φ^t). Pour alléger les notations, nous utiliserons parfois génériquement l'expression (G, X) -structure sans spécifier le groupe G et l'espace X en question. Toutes les (G, X) -structures étudiées jusqu'à la fin de la partie 3 seront en effet des (réductions de) $(\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\text{TR}P^2))$ -structures. Aucune confusion ne sera donc possible, et nous nous contenterons de spécifier le groupe et l'espace lorsque l'on voudra souligner les réductions effectuées.

Nous noterons

$$\pi_M: \tilde{M} \rightarrow M \quad (3.2.1)$$

le revêtement universel de M . Le tiré en arrière $\tilde{X}^0 := \pi_M^* X^0$ du champ X^0 associé au flot Anosov (φ^t) définit un flot $(\tilde{\varphi}^t)$ sur \tilde{M} , qui est l'unique relevé du flot (φ^t) à \tilde{M} ; il commute avec l'action de $\pi_1(M)$ et est caractérisé par la relation :

$$\pi_M \circ \tilde{\varphi}^t = \varphi^t \circ \pi_M. \quad (3.2.2)$$

On note $\rho: \text{Aut}(\tilde{M}) \rightarrow \text{PGL}(3, \mathbb{R})$ le morphisme d'holonomie, étendu aux $(\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2))$ -morphisms de \tilde{M} , et $\delta: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2)$ l'application développante. En particulier, $\tilde{\varphi}^t$ est par construction un (G, X) -isomorphisme pour tout t , et définit donc un sous-groupe à un paramètre $\psi^t := \rho(\tilde{\varphi}^t)$ de $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$, caractérisé par la relation :

$$\delta \circ \tilde{\varphi}^t = L_{\psi^t} \circ \delta, \quad (3.2.3)$$

dont on note

$$C(\psi^t) = C(\{\psi^t \mid t \in \mathbb{R}\}) \quad (3.2.4)$$

le centralisateur dans $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$. On appelle enfin *groupe d'holonomie* l'image $\rho(\pi_1(M)) < \text{PGL}(3, \mathbb{R})$. Pour toutes les notions relatives aux (G, X) -structures, nous renvoyons au paragraphe 1.3.1.

Avant de continuer l'étude de la $(\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2))$ -structure, nous faisons une remarque fondamentale.

Remarque 3.2.2. La $(\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2))$ -structure définie par le flot (φ^t) détermine à son tour directement le flot Anosov et les fibrés stable et instable (donc la donnée du flot Anosov et de la $(\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2))$ -structure sont équivalents). En effet, selon le principe général des (G, X) -structures évoqué à la remarque 1.3.5 selon lequel tout objet G -invariant sur X fait sens sur toute (G, X) -variété, puisque le flot projectif ψ^t commute avec le groupe d'holonomie et que les distributions E^α et E^β sont $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ -invariantes, il y a un sens à parler du flot défini par ψ^t sur une $(\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2))$ -variété (qui est le flot Anosov φ^t de départ si cette structure provient d'un flot Anosov, par définition du flot ψ^t), ou des distributions définies par E^α et E^β (qui sont respectivement les distributions instable et stable du flot Anosov d'origine, selon la remarque 3.1.5).

Jusqu'à la fin de la démonstration, l'objectif est de réduire le groupe G et l'espace X de la (G, X) -structure associée au flot Anosov de contact (φ^t) . Cela consiste à réduire le groupe d'holonomie et l'image de l'application développante, comme on l'a vu à la proposition 1.3.15. Nous commençons par réduire une première fois le groupe d'holonomie.

Lemme 3.2.3. *Soit (φ^t) un flot Anosov de contact en dimension trois et (ψ^t) le flot projectif qui lui est associé. Alors le groupe d'holonomie de la $(\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2))$ -structure définie par (φ^t) est contenu dans $C(\psi^t)$.*

Démonstration. Puisque $\tilde{\varphi}^t$ commute avec l'action de $\pi_1(M)$, le flot $\psi^t = \rho(\tilde{\varphi}^t)$ commute avec le groupe d'holonomie $\rho(\pi_1(M))$, qui est donc contenu dans le centralisateur de $\{\psi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$. On conclut en utilisant la proposition 1.3.15. \square

On note à partir de maintenant $[A]$ la classe d'équivalence d'une matrice A dans $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$. On appelle *flot projectif* un flot (g^t) dans $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$, et on étudie les différents cas possibles pour son centralisateur $C(g^t)$ dans $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$.

Proposition 3.2.4 (Centralisateurs de flots projectifs). *Soit (g^t) un flot projectif non trivial (ie non constant égal à id). Alors (g^t) vérifie une et une seule des trois propriétés suivantes :*

1. $C(g^t)$ est un sous-groupe fermé abélien de dimension 2 de $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$.
2. (g^t) est conjugué dans $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ à un sous-groupe à un paramètre de la forme

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

avec $\lambda \neq 0$, et dans ce cas son centralisateur est conjugué à

$$\left\{ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & c & \\ 0 & b & d & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right] \mid a, c, d \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^* \right\} \simeq \text{Heis}(3) \times \mathbb{R}^*.$$

3. (g^t) est conjugué dans $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ à un sous-groupe à un paramètre de la forme

$$\left(\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

avec $\lambda \neq 0$, et dans ce cas son centralisateur est conjugué à

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\} \simeq \text{GL}(2, \mathbb{R}).$$

Démonstration. Puisque g^t est un sous-groupe à un paramètre, il existe $X \in \text{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$ tel que $g^t = [\exp(tX)]$. Soit $X = S + N = N + S$ la décomposition de Jordan-Dumford de X , avec S semi-simple (ie diagonalisable sur \mathbb{C}) et N nilpotente. Soulignons qu'en travaillant sur \mathbb{C} , il existe une base dans laquelle S et N sont toutes deux sous forme réduite (ie S diagonale et N sous forme réduite de Jordan). On a $g^t = [\exp(tN) \exp(tS)] = [\exp(tS) \exp(tN)]$, donc $C(g^t) = C([\exp(tS)]) \cap C([\exp(tN)])$, et il suffit de traiter les différents cas possibles pour S et N à conjugaison près dans $\text{GL}(3, \mathbb{R})$. Nous allons utiliser essentiellement l'argument élémentaire suivant dans la distinction de cas que nous allons faire :

Fait. Si u et v sont deux endomorphismes d'un même espace vectoriel qui commutent, alors u stabilise les sous-espaces caractéristiques $\text{Ker}((u - \lambda id)^k)$ de u (donc en particulier ses sous-espaces propres).

Supposons d'abord que $N = 0$. Alors S a au moins deux valeurs propres différentes (sinon $([\exp(tS)])_t = id$ dans $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$, or on a supposé le flot non trivial). Si S a exactement deux valeurs propres différentes, alors elles sont toutes deux réelles et $[\exp(tS)]$ est conjuguée dans $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ à

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec $\lambda \neq 0$ (en effet, quitte à multiplier par une homothétie, on peut toujours choisir dans $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ de fixer une des valeurs propres de la matrice représentante égale à 1), donc (g^t) est de la forme annoncée dans le troisième cas de la proposition, et puisqu'une matrice de $\text{GL}(3, \mathbb{R})$ qui commute avec $\exp(tS)$ stabilise ses espaces propres, $C(\exp(tS))$ est bien conjugué aux matrices diagonales par blocs comme annoncé. On est donc dans le troisième cas de la proposition.

Si S a trois valeurs propres différentes, alors un endomorphisme qui commute avec $\exp(tS)$ doit stabiliser individuellement chacune des trois directions propres, donc doit également être diagonalisable, et ainsi $C(g^t)$ est abélien et de dimension 2, donc est dans le premier cas.

On suppose maintenant N non nul. Grâce à la forme réduite de Jordan, on sait qu'à conjugaison près, on peut supposer S diagonale et N de l'une des deux formes ci dessous (on a pour le second cas deux représentants possibles) :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{cas a})$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{cas b, forme b1})$$

$$\text{conjugué à } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{cas b, forme b2})$$

Puisque N commute avec S donc stabilise ses espaces propres, le cas a impose que S est une homothétie, et le cas b interdit que S ait trois valeurs propres distinctes (en particulier, on sait déjà que dans les deux cas les valeurs propres de S sont toutes réelles).

On suppose d'abord que N est de la forme a. Soit $g \in C(\exp(tN))$, alors g commute pour tout t avec la partie nilpotente

$$U^t := \exp(tN) - id = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\exp(tN)$, et donc en notant $g = g_N + g_D$ la décomposition de Jordan-Dumford de g , g_D et g_N commutent avec U^t pour tout t . On déduit de $U^t g = g U^t$ que g stabilise pour tout $i = 1, 2, 3$ le sous-espace caractéristique $\text{Ker}((U^t - id)^i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$, ie g est triangulaire supérieure. On déduit ensuite de $U^t g_D = g_D U^t$ que g_D est une homothétie, puis de $U^t g_N = g_N U^t$ que les trois éléments surdiagonaux de g_N sont égaux. Donc finalement, $C(g^t) = C([\exp(tN)])$ est conjugué à

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

qui est un sous-groupe abélien de dimension 2. On est donc dans le premier cas.

On suppose maintenant que N est de la forme b, et que S est une homothétie, et on choisit pour N le représentant de la forme b1. Alors $g^t = \exp(tN)$ est bien de la deuxième forme annoncée dans la proposition, et on sait déjà que les éléments de $C(g^t)$ sont de la forme suivante (par exemple car ils stabilisent l'espace propre $\text{Ker}(g^t - id)$) :

$$g = \begin{bmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec $A \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^2$. La relation $Ag^t = g^t A$ évaluée en $(0, 0, 1)$ impose alors $A(e_1) = e_1$ avec e_1 le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^3 , donc $C(g^t)$ est bien de la deuxième forme annoncée dans la proposition.

On suppose enfin que N est de la forme b, et que S a deux valeurs propres distinctes, et on choisit pour N le représentant de la forme b2, et une base de réduction dans laquelle S est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Alors

$C(\exp(tS))$ est l'ensemble des matrices diagonales par blocs $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $A \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$, et puisqu'on vérifie que $C(\begin{pmatrix} 1 & \lambda t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}^* \right\}$ par le même raisonnement qu'à la fin du cas a pour N , $C(g^t)$ est finalement un sous-groupe abélien de dimension 2, donc on est dans le premier cas. \square

On élimine maintenant le premier cas distingué dans la proposition précédente pour le flot projectif ψ^t associé au flot Anosov de contact φ^t . Nous utilisons pour cela les deux résultats généraux suivants sur les flots Anosov.

Lemme 3.2.5. *Soit (φ^t) un flot d'Anosov sur une variété M compacte de dimension trois. Alors il n'existe pas de surface plongée fermée (et non vide) de M préservée par (φ^t) .*

Démonstration. On suppose qu'une telle sous-variété existe et on l'appelle S . On munit M d'une métrique riemannienne. On sait déjà que TS contient la direction tangente au flot $\mathbb{R}X^0$, où $X^0 = \frac{d}{d\varphi^t}|_{t=0}$. On considère un champ de vecteur V de norme 1 sur S qui engendre en tout point la distribution lisse de rang un $TS \cap (E^+ \oplus E^-)$ (c'est une distribution de rang 1 car TS contient $\mathbb{R}X^0$). Un tel champ de vecteur est unique au signe près, donc V n'est pas nécessairement continu (il sera continu et même lisse si S est simplement connexe) mais en notant $V = V^+ + V^-$ la décomposition de V dans la somme directe $E^+ \oplus E^-$, $\|V^+\|$ et $\|V^-\|$ sont lisses sur S . On suppose à partir de maintenant que $\|V^+\|$ est non identiquement nulle sur S , ie que TS ne coïncide pas en tout point avec $\mathbb{R}X^0 \oplus E^-$, l'autre cas se traitant de la même façon en considérant $\|V^-\|$. Rappelons qu'une description alternative des mesures à densités sur une variété N de dimension n quelconque consiste à considérer une section lisse du fibré des densités sur N , définies comme les applications $\alpha: (\mathbb{T}_x N)^n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $u \in \text{End}(\mathbb{T}_x N)$ et pour tout $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{T}_x N$: $\alpha(u(v_1), \dots, u(v_n)) = |\det u| \alpha(v_1, \dots, v_n)$ (pour plus de détail sur cette notion, on renvoie à [Lee12, Chapter 16]). On définit alors une densité lisse μ sur S par sa valeur sur la base (V, X^0) : $\mu(V, X^0) = \|V^+\|$, et par hypothèse $\int_S \mu \neq 0$. Puisque (φ^t) est un flot Anosov, il existe alors deux constantes $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$: $(\varphi^t)^* \mu = \alpha \mu$ avec $\alpha: S \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ vérifiant $|\alpha| \geq \frac{1}{C} \lambda^{-t}$. Pour tout $t > 0$ on a donc :

$$\left| \int_S \mu \right| = \left| \int_S (\varphi^t)^* \mu \right| \geq \frac{1}{C} \lambda^{-t} \left| \int_S \mu \right|,$$

ce qui impose $\int_S \mu = 0$ et contredit la définition de μ . L'existence d'une sous-variété compacte préservée par φ^t est donc impossible. \square

Lemme 3.2.6. *Soit (φ^t) un flot d'Anosov sur une variété M compacte de dimension trois, et soit X un champ de vecteur sur M qui commute avec le champ $X^0 = \frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi^t$ défini par le flot φ^t . Alors X est proportionnel à X^0 , ie il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda X^0$ sur M .*

Démonstration. On munit M d'une métrique riemannienne quelconque. Il existe une fonction $\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$, et deux champs de vecteurs X^-, X^+ respectivement tangents à la distribution stable et instable de φ^t , tels que $X = \alpha X^0 + X^- + X^+$. Puisque X commute avec X^0 , on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $p \in M$: $X_{\varphi^t(p)} = D_p \varphi^t(X_p)$, ce qui impose, puisque les distributions stable et instable sont préservées par les différentielles de φ^t , les relations :

$$\alpha(\varphi^t(p)) = \alpha(p), X_{\varphi^t(p)}^+ = D_p \varphi^t(X_p^+), X_{\varphi^t(p)}^- = D_p \varphi^t(X_p^-). \quad (3.2.5)$$

En particulier, αX^0 est donc de norme bornée sur chaque orbite. On en déduit selon les relations (3.2.5) et les propriétés du flot Anosov que si $X^+(p) \neq 0$ en un point $p \in M$ par l'absurde, alors la norme de $X_{\varphi^t(p)}$ devrait diverger en $+\infty$, ce qui est impossible car M est compacte, donc X^+ est identiquement nul. Par un raisonnement symétrique en $-\infty$, on en déduit finalement que $X = \alpha X^0$, avec α constante sur chaque orbite. Or si la différentielle de α est non nulle en un point $p \in M$, alors l'image de α est un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , donc puisque par théorème de Sard l'ensemble des valeurs critiques est de mesure nulle donc d'intérieur vide, on en déduit l'existence d'une valeur régulière $c \in \mathbb{R}$ de α telle que $S := \alpha^{-1}(c)$ est non vide. Alors S est une sous-variété plongée compacte de M de dimension 2, préservée par le flot, ce qui contredit le lemme 3.2.5 prouvé ci-dessus. \square

Proposition 3.2.7. *Soit (φ^t) un flot Anosov de contact en dimension trois et (ψ^t) le flot projectif qui lui est associé. Alors $C(\psi^t)$ n'est pas un sous-groupe fermé abélien de dimension 2, donc (ψ^t) et $C(\psi^t)$ sont conjugués à l'une des formes 2 ou 3 décrites dans la proposition 3.2.4.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que l'on est dans le premier cas. Nous allons montrer qu'il existe alors un champ Y sur $\mathbb{P}(\mathbb{TRP}^2)$, non proportionnel au champ $Y^0 := \frac{d}{dt}|_{t=0} \psi^t$ défini par le flot ψ^t , et préservé par le groupe d'holonomie $C(\psi^t) = \rho(\pi_1(M))$, donc en particulier, Y est préservé par le flot $\psi^t = \rho(\tilde{\varphi}^t)$ contenu dans $C(\psi^t)$. Un tel champ suffit pour conclure. En effet, il définit sur \tilde{M} un champ $\tilde{X} := \delta^* Y$ non proportionnel à $\tilde{X}^0 := \frac{d}{dt}|_{t=0} \tilde{\varphi}^t$ mais qui commute avec \tilde{X}^0 , et qui est préservé par l'action du groupe fondamental $\pi_1(M)$, donc que l'on peut pousser en avant sur M en un champ $X = \pi_{M*} \tilde{X}$ non proportionnel à X^0 et qui commute avec X^0 , ce qui contredit le lemme 3.2.6 démontré précédemment.

Puisque l'action de $C(\psi^t) < \text{PGL}(3, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}(\mathbb{TRP}^2)$ est fidèle, l'antimorphisme d'algèbres de Lie défini par les champs de vecteurs fondamentaux : $Y \in \text{Lie}(C(\psi^t)) \mapsto \{Y^L: p \mapsto \frac{d}{ds}|_{s=0} e^{sY} \cdot p\} \in \chi(\mathbb{P}(\mathbb{TRP}^2))$ est injectif. Puisque par hypothèse, $C(\psi^t)$ est de dimension 2, il existe $Y \in \text{Lie}(C(\psi^t))$ non colinéaire à la direction de Y^0 , de sorte que Y^L est un champ de vecteurs sur $\mathbb{P}(\mathbb{TRP}^2)$ non proportionnel à Y^0 . Mais puisque $C(\psi^t)$ est abélien par hypothèse, on vérifie facilement que Y^L est également invariant par l'action de $C(\psi^t)$. Donc Y^L vérifie les propriétés annoncées, ce qui termine la preuve de ce lemme. \square

Nous réduisons maintenant l'image de l'application développante. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2.8. *Soit $S \subset \mathbb{P}(\mathbb{TRP}^2)$ une surface plongée fermée de $\mathbb{P}(\mathbb{TRP}^2)$, invariante par le groupe d'holonomie de la $(\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{TRP}^2))$ -structure et par le flot projectif (ψ^t) . Alors l'image de l'application développante évite S .*

Démonstration. Supposons que l'intersection $S \cap \delta(\tilde{M})$ est non vide. $\tilde{S} := \delta^{-1}(S)$ est alors une sous-variété fermée de dimension 2 de \tilde{M} , invariante par l'action de $\pi_1(M)$ et par le relevé $\tilde{\varphi}^t$ du flot Anosov. Puisque \tilde{S} est invariante par $\pi_1(M)$ ie saturée par les fibres de π_M , nous en déduisons deux informations sur sa projection $\Sigma = \pi_M(\tilde{S})$ sur M : tout d'abord Σ est également une sous-variété de M de dimension 2, et de plus puisque π_M est ouverte (comme toute projection associée au quotient par une action de groupe) Σ est également fermée, donc compacte car M est compacte. Enfin Σ est invariante par le flot Anosov φ^t car \tilde{S} est invariante par son relevé. Une telle surface compacte invariante par un flot Anosov contredirait le lemme 3.2.5, donc l'intersection $S \cap \delta(\tilde{M})$ est bien vide. \square

On obtient finalement la réduction suivante de la $(\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{TRP}^2))$ -structure (on utilise dans ce résultat la description des ouverts de type Ω_1 et Ω_2 et des surfaces $S_{\alpha, \beta}$ et $S_{\beta, \alpha}$ associées, faite au paragraphe 1.2.2).

Corollaire 3.2.9. *Soit (φ^t) un flot Anosov de contact en dimension trois, et (ψ^t) le flot projectif associé. Alors à conjugaison près dans $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$, le morphisme d'holonomie et l'application développante de la $(\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathbb{TRP}^2))$ -structure définie par (φ^t) sont de l'une et une seule des deux formes suivantes :*

1. *L'image de δ est contenue dans l'ouvert Ω_1 standard, et (ψ^t) et $C(\psi^t)$ sont de la seconde forme décrite à la proposition 3.2.4.*
2. *L'image de δ est contenue dans l'ouvert Ω_2 standard, et (ψ^t) et $C(\psi^t)$ sont de la troisième forme décrite à la proposition 3.2.4.*

Démonstration. Conjuguer le morphisme d'holonomie dans $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ revient à traduire l'application développante δ par un élément de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$, or pour $i = 1$ ou 2 $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ agit de façon homogène sur l'ensemble des ouverts de type Ω_i , donc selon la proposition 3.2.7 on peut supposer que (ψ^t) et $C(\psi^t)$ sont de l'une des deux formes 2 ou 3 explicitées à la proposition 3.2.4. On notera $G_1 \simeq \mathrm{Heis}(3) \rtimes \mathbb{R}^*$ le groupe $C(\psi^t)$ décrit au cas 2, et $G_2 \simeq \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ celui décrit au cas 3. Pour $i = 1$ ou 2 , on notera de plus Ω_i l'ouvert standard de type i , et $(S_{\alpha, \beta}, S_{\beta, \alpha}^i)$ le couple de surfaces (plongées fermées) de $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$ telles que $\Omega_i = \mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2) \setminus (S_{\alpha, \beta} \cap S_{\beta, \alpha}^i)$. On vérifie que G_i , et donc $(\psi^t) < C(\psi^t) = G_i$, stabilisent $S_{\alpha, \beta}$ et $S_{\beta, \alpha}^i$, donc selon le lemme 3.2.8 l'image de δ évite $S_{\alpha, \beta} \cup S_{\beta, \alpha}^i$, et par définition on a finalement : $\delta(\tilde{M}) \subset \Omega_i$, ce qui termine la preuve. \square

3.3 Une $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2))$ -structure kleinienne

On a vu au paragraphe 1.3.1 que les (G, X) -variétés complètes compactes sont plus aisées à étudier : concrètement cela revient à étudier les sous-groupes discrets de G agissant librement, proprement et co-compactement. L'objectif de cette section est de se ramener au cas des structures keniennes dans le cas où l'image de l'application développante associée à un flot Anosov de contact (voir la proposition 3.1.4) est contenue dans un ouvert de type Ω_1 ou Ω_2 , étudiés au paragraphe 1.2.2.

Théorème 3.3.1 (Complétude). *Soit (φ^t) un flot Anosov de contact sur une variété M de dimension trois, et considérons la $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2))$ -structure définie par (φ^t) . Si l'image de l'application développante est contenue dans un ouvert de type Ω_1 (resp. Ω_2) de $\mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2)$, alors l'application développante est un revêtement à valeurs dans Ω_1 (resp. Ω_2). En particulier dans ces deux cas, la $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2))$ -structure associée à (φ^t) est kleinienne.*

3.3.1 Quelques remarques supplémentaires sur les cercles α et β

Nous utiliserons dans la preuve de la complétude quelques détails supplémentaires sur la géométrie de l'espace modèle, que nous exposons maintenant.

Notons Ω_i l'un des deux ouverts Ω_1 ou Ω_2 , et soit p un point quelconque de Ω_i .

L'intersection du cercle $C_\alpha(p)$ avec Ω_i évite exactement un point, que nous noterons p_*^α , qui est l'unique point de $C_\alpha(p)$ appartenant à la surface $S_{\alpha, \beta}(D_\infty)$. De même, l'intersection du cercle $C_\beta(p)$ avec Ω_i évite également exactement un point, que nous noterons p_*^β , qui est l'unique point de $C_\beta(p)$ appartenant à la surface $S_{\beta, \alpha}(x_i)$ (il correspond à la droite parallèle à $\mathbb{R}e_1$ dans le cas de Ω_1 , et à la droite qui contient $(0, 0)$ pour Ω_2).

En particulier, les intersections $C_\alpha(p) \cap \Omega_i = C_\alpha(p) \setminus \{p_*^\alpha\}$ et $C_\beta(p) \cap \Omega_i = C_\beta(p) \setminus \{p_*^\beta\}$ sont difféomorphes à \mathbb{R} .

Soulignons également que puisque le groupe G_i des automorphismes de Ω_i envoie surfaces $S_{\alpha, \beta}$ sur surfaces $S_{\alpha, \beta}$, pour tout $p \in \Omega_i$ et tout $g \in G_i$, $g \cdot p_*^\alpha = (g \cdot p)_*^\alpha$; et de même $g \cdot p_*^\beta = (g \cdot p)_*^\beta$.

On s'intéresse maintenant aux stabilisateurs dans les groupes d'automorphismes G_i des cercles α et β . L'action de G_i sur ces cercles étant transitive, ils sont tous conjugués dans G_i à $\mathrm{Stab}_{G_i}(C_\alpha(o_i))$, respectivement $\mathrm{Stab}_{G_i}(C_\beta(o_i))$ (où $o_1 = ((0, 0), \mathbb{R}e_2)$ et $o_2 = ((1, 0), \mathbb{R}e_2 + (1, 0))$). Ces stabilisateurs sont :

$$\mathrm{Stab}_{G_1}(C_\alpha(o_1)) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right\} \quad (3.3.1)$$

$$\mathrm{Stab}_{G_2}(C_\alpha(o_2)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & \lambda \end{pmatrix} \right\} \quad (3.3.2)$$

$$\mathrm{Stab}_{G_1}(C_\beta(o_1)) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right\} \quad (3.3.3)$$

$$\mathrm{Stab}_{G_2}(C_\beta(o_2)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.3.4)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

Il nous sera également utile de paramétrer les cercles α et β par $\mathbb{R}P^1$, de façon équivariante pour les actions respectives des stabilisateurs des cercles α et β , et de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. Nous explicitons ci-dessous des exemples de paramétrages.

— Le paramétrage de $C_\alpha(o_1)$ défini sur les points de la droite projective définie par $\mathbb{R}e_2$ par :

$$(0, b) \mapsto \mathbb{R}(1, b), (o_1)^\alpha_* \mapsto \mathbb{R}e_2,$$

est ϕ -équivariant, où le morphisme $\phi: \text{Stab}_{G_1}(C_\alpha(o_1)) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ est défini par :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & \mu \end{pmatrix}.$$

- Le cercle β passant par o_1 s'identifie immédiatement à l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^2 , et ce paramétrage naturel est équivariant pour la projection naturelle de $\text{Stab}_{G_1}(C_\beta(o_1))$ dans $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$.
- La droite affine $\mathbb{R}e_2 + (1, 0)$ définit une identification naturelle entre le cercle α passant par o_2 et $\mathbb{R}P^1$, qui est équivariante pour l'inclusion de $\text{Stab}_{G_2}(C_\alpha(o_2))$ dans $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$.
- La translation de vecteur $-(1, 0)$ identifie naturellement le cercle β passant par o_2 à $\mathbb{R}P^1$, et ce paramétrage est équivariant pour l'inclusion de $\text{Stab}_{G_2}(C_\beta(o_2))$ dans $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$.

3.3.2 Relèvement de chemins et revêtements

Nous allons également utiliser dans la preuve de la complétude la caractérisation suivante des revêtements : ce sont les difféomorphismes locaux qui vérifient la propriété de relèvement des chemins (où plutôt qui relèvent « assez » de chemins).

Lemme 3.3.2 (Caractérisation des revêtements). *Soit $\pi: M \rightarrow N$ un difféomorphisme local entre deux variétés lisses de dimension n , N étant connexe. On suppose qu'il existe n distributions de dimension 1 (E_1, \dots, E_n) sur N telles que $(E_1 \oplus \dots \oplus E_n)_x = \text{T}_x N$ pour tout $x \in N$, et tel que pour tout $i = 1, \dots, n$, pour tout $x \in \text{Im}(\pi)$, et pour tout $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, tout chemin partant de x et tangent à E_i se relève à partir de \tilde{x} . Alors π est un revêtement de M sur N (donc en particulier, π est surjectif).*

Précisons que si $\pi: M \rightarrow N$ est une application continue entre espaces topologiques, et $\gamma: [0; 1] \rightarrow N$ un chemin sur N , on dit que γ se relève à partir d'un point $x \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ de M s'il existe un chemin $\tilde{\gamma}: [0; 1] \rightarrow M$, tel que $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(0) = x$. Soulignons également que si π est de plus supposé être un homéomorphisme local, alors le relevé d'un chemin en un point donné est nécessairement unique (car si $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ relèvent tous deux un chemin γ en x , alors $\{t \mid \tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)\}$ est fermé et non vide car contient 0, et ouvert car π est un homéomorphisme local, donc $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ par connexité de $[0; 1]$).

Démonstration. Tout d'abord, pour tout $i = 1, \dots, n$, si X_i est un champ défini sur un ouvert U quelconque de N tel que $E_i = \mathbb{R}X_i$ sur U , alors l'hypothèse de relèvement faite sur π signifie exactement que toute orbite de X_i passant par un point $x \in \text{Im}(\pi) \cap U$ se relève à partir de tout point de $\pi^{-1}(x)$. De plus pour tout $x \in N$, si X_1, \dots, X_n sont des champs définis localement autour de x qui engendrent les distributions (ie $E_i = \mathbb{R}X_i$), en notant $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ les flots respectif de X_1, \dots, X_n , il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que l'application $\phi_x: (t_1, \dots, t_n) \mapsto \varphi_1^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_n^{t_n}(x)$ soit un difféomorphisme du voisinage $U_{\varepsilon_x} :=]-\varepsilon_x; \varepsilon_x[^n$ de $(0, \dots, 0)$ dans \mathbb{R}^n sur un voisinage U_x de x dans N (par inversion locale). Les affirmations ci-dessous nous permettront de conclure.

Faits. 1. Pour tout $x \in N$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert U_x de x , tels que :

- ϕ_x induit un difféomorphisme de U_ε sur un voisinage ouvert de x contenant U_x ;
- et pour tout $y \in U_x$, ϕ_y induit un difféomorphisme de U_ε sur un voisinage ouvert U_y de y contenant x .

2. Soit $x \in \text{Im}(\pi)$, et $\varepsilon_x > 0$ tel que ϕ_x induit un difféomorphisme de U_{ε_x} sur un voisinage ouvert U_x de x . Alors pour tout $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ il existe un voisinage $U_{\tilde{x}}$ de \tilde{x} dans M , et un difféomorphisme $\tilde{\phi}_{\tilde{x}}$ de U_{ε_x} sur $U_{\tilde{x}}$, tel que :

$$\tilde{\phi}_{\tilde{x}}(0, \dots, 0) = \tilde{x} \text{ et } \pi \circ \tilde{\phi}_{\tilde{x}} = \phi_x. \quad (3.3.5)$$

En particulier π induit donc pour tout $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ un difféomorphisme de $U_{\tilde{x}}$ sur U_x .

3. Tout chemin sur N partant d'un point $x \in \text{Im}(\pi)$ quelconque se relève en n'importe quel point de $\pi^{-1}(x)$.
4. π est surjectif.

Démonstration des Faits. 1. En effet, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\varepsilon_i > 0$ et un voisinage de x sur lequel le flot de X_i est défini sur $]-\varepsilon_i; \varepsilon_i[$. Puisqu'il y a un nombre fini de champs, il existe donc un voisinage V de x et $\varepsilon > 0$ tel que φ_i est défini à partir de tout point de V sur $]-\varepsilon; \varepsilon[$, et quitte à réduire V et ε on peut également supposer que ϕ_x induit un difféomorphisme de U_ε sur V . Il existe un voisinage ouvert $U_2 \subset V$ de x tel que $\cup_{t \in]-\varepsilon; \varepsilon[} \varphi_2^t(U_2) \subset V$, et par récurrence finie un voisinage $U \subset V$ de x tel que $\cup_{(t_2, \dots, t_n) \in]-\varepsilon; \varepsilon[^{n-1}} \varphi_2^{t_2} \circ \dots \circ \varphi_n^{t_n}(U) \subset V$, de sorte que pour tout $y \in U$, ϕ_y est défini sur U_ε . Il existe $0 < \mu < \varepsilon/2$ tel que $U_x := \phi_x(U_\mu) \subset U$, et on vérifie alors facilement que pour tout $y \in U_x$, ϕ_y est injective sur U_μ (car $y = \phi_x(s_1, \dots, s_n)$ avec $(s_1, \dots, s_n) \in U_\mu$, donc pour $(t_1, \dots, t_n) \in U_\mu$, $\phi_y(t_1, \dots, t_n) = \phi_x(s_1 + t_1, \dots, s_n + t_n)$ avec $(s_1 + t_1, \dots, s_n + t_n) \in U_\varepsilon$, or ϕ_x est injective sur U_ε), et donc que ϕ_y induit un difféomorphisme de U_μ sur un voisinage U_y de y . Il existe alors un voisinage ouvert U'_x de x contenu dans U_x , tel que pour tout $y \in U'_x$ on ait de plus : $U_y \ni x$.

2. Soit $x \in \text{Im}(\pi)$ et $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. Pour ne pas alourdir les notations on notera simplement pour cette démonstration $\varepsilon = \varepsilon_x$. Il suffit de montrer qu'il existe une application $\tilde{\phi}_{\tilde{x}}$ définie sur U_ε , qui vérifie les conditions (3.3.5), car ceci impliquera immédiatement que $\tilde{\phi}_{\tilde{x}}$ est un difféomorphisme local (car π et ϕ_x le sont), donc que son image $U_{\tilde{x}}$ est un voisinage ouvert de \tilde{x} , et que $\tilde{\phi}_{\tilde{x}}$ est injective (car ϕ_x l'est), ie finalement que $\tilde{\phi}_{\tilde{x}}$ est un difféomorphisme de U_ε sur $U_{\tilde{x}}$.

Le chemin $(\phi_x(0, \dots, s) = \varphi_n^s(x))_{s \in]-\varepsilon; \varepsilon[}$ est contenu dans la courbe intégrale de X_n passant par x , donc se relève par hypothèse en \tilde{x} , en un chemin que l'on note $(\tilde{\phi}_{\tilde{x}}(0, \dots, 0, s))_{s \in]-\varepsilon; \varepsilon[}$. Supposons maintenant par récurrence que pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on ait défini l'application $\tilde{\phi}_{\tilde{x}}$ sur $\{0\}^{n-i} \times]-\varepsilon; \varepsilon[$, et qu'elle vérifie la condition (3.3.5) de relèvement. Alors pour tout $(t_{n-i+1}, \dots, t_n) \in]-\varepsilon; \varepsilon[$, le point $\phi_x(0, \dots, 0, t_{n-i+1}, \dots, t_n)$ appartient en particulier à l'image de π , donc le chemin $(\phi_x(0, \dots, 0, s, t_{n-i+1}, \dots, t_n))_{s \in]-\varepsilon; \varepsilon[}$ contenu dans la courbe intégrale de X_{n-i} passant par $\phi_x(0, \dots, 0, t_{n-i+1}, \dots, t_n)$ se relève en $\tilde{\phi}_{\tilde{x}}(0, \dots, 0, t_{n-i+1}, \dots, t_n)$, en un chemin noté $(\tilde{\phi}_{\tilde{x}}(0, \dots, 0, s, t_{n-i+1}, \dots, t_n))_{s \in]-\varepsilon; \varepsilon[}$ qui prolonge l'application $\tilde{\phi}_{\tilde{x}}$ définie jusqu'à maintenant en une application $\tilde{\phi}_{\tilde{x}}: \{0\}^{n-i-1} \times]-\varepsilon; \varepsilon[\rightarrow M$ qui vérifie la condition de relèvement (3.3.5). Donc par récurrence, on construit bien l'application $\tilde{\phi}_{\tilde{x}}$ annoncée.

3. Soit $x \in \text{Im}(\pi)$ et $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. Soit $(\gamma(s))_{s \in [0; 1]}$ un chemin sur N partant de x en 0. Alors $E = \{s \in [0; 1] \mid \gamma|_{[0; s]} \text{ se relève à partir de } \tilde{x}\}$ est non vide, et ouvert car π est un difféomorphisme local, et il suffit par connexité de montrer que E est fermé pour savoir que γ se relève entièrement à partir de \tilde{x} .

Soit (s_n) une suite de points de E convergeant vers $s \in [0; 1]$, et $(\tilde{\gamma}_n)$ une suite de chemins relevant successivement $\gamma|_{[0; s_n]}$ à partir de \tilde{x} ; en particulier $\tilde{\gamma}_{n+1}$ prolonge donc $\tilde{\gamma}_n$. On note $x' = \gamma(s)$, et on utilise le réel $\varepsilon > 0$ et le voisinage ouvert $U_{x'}$ de x' donnés par la première affirmation que nous avons prouvée, tels que $\phi_{x'}$ induit un difféomorphisme de U_ε sur un voisinage de x' contenant $U_{x'}$, et tels que pour tout $y \in U_{x'}$, ϕ_y induit un difféomorphisme de U_ε sur un voisinage U_y de y contenant x' . Puisque $(\gamma(s_n))$ converge vers x' , il existe N tel que $\gamma(s_N) \in U_{x'}$, et selon le résultat prouvé précédemment il existe alors un voisinage $U_{\tilde{\gamma}_N(s_N)}$ de $\tilde{\gamma}_N(s_N)$ tel que π induit un difféomorphisme de $U_{\tilde{\gamma}_N(s_N)}$ sur $U_{\gamma(s_N)}$. Or $U_{\gamma(s_N)}$ contient $x' = \gamma(s)$, donc on peut relever $\gamma|_{[s_N; s]}$ à partir de $\tilde{\gamma}_N(s_N)$, et en recollant ce relèvement à $\tilde{\gamma}_N$, on a finalement relevé γ sur $[0; s]$ à partir de \tilde{x} , ce qui termine la preuve de cette troisième affirmation.

4. Puisque N est connexe donc connexe par arcs, en choisissant $x \in \text{Im}(\pi)$, on peut joindre tout point $y \in N$ à x par un chemin, or ce chemin se relève selon l'affirmation précédente, donc $y \in \text{Im}(\pi)$. \square

Montrons maintenant que ces affirmations permettent de conclure. Soit $x \in N = \text{Im}(\pi)$ (selon la dernière affirmation prouvée ci-dessus), et $\varepsilon_x > 0$ tel que ϕ_x induit un difféomorphisme de U_{ε_x} sur un voisinage U_x de x . En utilisant les voisinages $U_{\tilde{x}}$ des points de $\pi^{-1}(x)$ fournis par la seconde affirmation prouvée ci-dessus, il nous suffit pour montrer que π est un revêtement de montrer que $\pi^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)} U_{\tilde{x}}$, car on sait que π se restreint pour tout $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ en un difféomorphisme de $U_{\tilde{x}}$ sur U_x .

Soit $\tilde{y} \in \pi^{-1}(U_x)$. En notant $y = \pi(\tilde{y})$, il existe $(t_1, \dots, t_n) \in U_{\varepsilon_x}$ tel que $y = \phi_x(t_1, \dots, t_n)$. Posons pour $s \in [0; 1]$, $\gamma(s) = \phi_x((1-s)t_1, \dots, (1-s)t_n)$. C'est un chemin partant de $y \in \text{Im}(\pi)$, donc il se relève selon la troisième affirmation que nous avons prouvée ci-dessus en un chemin $\tilde{\gamma}$ à partir de \tilde{y} . En notant $\tilde{x} = \tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(x)$, $\tilde{\gamma}^{-1}: s \mapsto \tilde{\gamma}(1-s)$ et $s \mapsto \tilde{\phi}_{\tilde{x}}(st_1, \dots, st_n)$ sont alors deux chemins qui relèvent $\gamma^{-1}: s \mapsto \gamma(1-s)$ à partir de \tilde{x} , donc par unicité : $\tilde{\gamma}(s) = \tilde{\phi}_{\tilde{x}}((1-s)t_1, \dots, (1-s)t_n), \forall s$. En particulier, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{y} = \tilde{\phi}_{\tilde{x}}(t_1, \dots, t_n) \in U_{\tilde{x}}$.

Pour montrer que l'union $\bigsqcup_{\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)} U_{\tilde{x}}$ est disjointe, il suffit de remarquer que si $\tilde{y} \in \pi^{-1}(U_x)$ est dans $U_{\tilde{x}_1}$ et $U_{\tilde{x}_2}$, et si $\pi(\tilde{y}) = \phi_x(t_1, \dots, t_n)$ alors le chemin $\gamma(s) = \phi_x(st_1, \dots, st_n)$ dans U_x de x à $\pi(\tilde{y})$ se relève à partir de \tilde{x}_1 en $\tilde{\gamma}_1$, à partir de \tilde{x}_2 en $\tilde{\gamma}_2$, et ces deux chemins (parcourus en sens inverse) sont alors des relevés du même chemin $(\phi_x((1-s)t_1, \dots, (1-s)t_n))_s$ à partir de \tilde{y} , donc doivent être égaux, d'où : $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$. \square

On suppose à partir de maintenant que l'image de l'application développante est contenue dans l'un des ouverts Ω_1 ou Ω_2 , que l'on notera Ω_i .

Notations 3.3.3. On note $\tilde{E}^+ = \pi_M^* E^+$ et $\tilde{E}^- = \pi_M^* E^-$ les tirés en arrière sur \tilde{M} des distributions stable et instable, et $\tilde{\mathcal{F}}^+, \tilde{\mathcal{F}}^-$ les feuilletages de dimension 1 de \tilde{M} qui leur sont associés (ce sont les relevés des feuilletages stable et instable de φ^t), que l'on appelle simplement *feuilletage stable* (respectivement *instable*) relevé à \tilde{M} .

Rappelons que l'on note (E^α, E^β) la structure lagrangienne de contact canonique sur $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2)$, que les feuilles de ces deux distributions sont respectivement les cercles α et β (voir le paragraphe 1.2.1 pour ces définitions), et que nous avons également introduit dans le paragraphe précédent le flot projectif $\psi^t = \rho(\tilde{\varphi}^t)$ de $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$. En notant $Y_0(x) := \frac{d\psi^t(x)}{dt}|_{t=0}$ le champ associé au flot ψ^t , on remarque en particulier que les distributions $(E^\alpha, E^\beta, \mathbb{R}Y_0)$ forment un scindement du fibré tangent à $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{R}P^2)$ (car $\tilde{\varphi}$ est transverse à la somme des distributions stable et instable relevées à \tilde{M}), et que par construction les orbites de $\tilde{\varphi}^t$ relèvent celles de Y_0 . Il suffit donc pour appliquer le lemme 3.3.2 démontré précédemment à l'application développante $\delta: \tilde{M} \rightarrow \Omega_i$ de savoir relever les cercles α et β en restriction à Ω_i .

Corollaire 3.3.4. *Supposons que l'image de l'application développante δ est contenue dans l'ouvert Ω_i , pour $i = 1$ ou 2 . Supposons de plus que pour tout $\tilde{x} \in \tilde{M}$, l'application développante en restriction à la feuille stable (respectivement instable) passant par \tilde{x} , est surjective sur l'intersection du cercle α (respectivement β) passant par $\delta(\tilde{x})$ avec Ω_i , ie que :*

$$\delta(\tilde{\mathcal{F}}^+(\tilde{x})) = C_\alpha(\delta(\tilde{x})) \cap \Omega_i \text{ et } \delta(\tilde{\mathcal{F}}^-(\tilde{x})) = C_\beta(\delta(\tilde{x})) \cap \Omega_i, \forall \tilde{x} \in \tilde{M}. \quad (3.3.6)$$

Alors δ est un revêtement de \tilde{M} sur Ω_i .

Démonstration. Remarquons tout d'abord que les feuilles stables et instables $\tilde{\mathcal{F}}^\pm$ de \tilde{M} sont des immersions injectives de \mathbb{R} . En effet, on sait déjà que ce sont des variétés de dimension 1 connexes, or ce ne sont pas des immersions injectives de S^1 , car il existerait sinon en restreignant δ , un difféomorphisme local de $\tilde{\mathcal{F}}^+(\tilde{x}) \simeq S^1$ (respectivement $\tilde{\mathcal{F}}^-$) sur $C_\alpha(\delta(\tilde{x})) \cap \Omega_i$ (respectivement $C_\beta(\delta(\tilde{x}))$). Or comme on l'a vu au paragraphe précédent, les intersections des cercles α ou β avec les ouverts Ω_i sont difféomorphes à \mathbb{R} , et il n'existe pas de difféomorphisme local de S^1 sur \mathbb{R} (son image devrait être compacte donc fermée, et ouverte, donc il devrait être d'image \mathbb{R} par connexité, or \mathbb{R} n'est pas compact).

Si δ vérifie la condition (3.3.6), alors pour tout \tilde{x} dans \tilde{M} , $\delta|_{\tilde{\mathcal{F}}^+(\tilde{x})}: \tilde{\mathcal{F}}^+(\tilde{x}) \rightarrow C_\alpha(\delta(\tilde{x})) \cap \Omega_i$ est un difféomorphisme local surjectif entre deux variétés difféomorphes à \mathbb{R} , donc il est de plus injectif comme tout difféomorphisme local de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et c'est finalement un difféomorphisme de $\tilde{\mathcal{F}}^+(\tilde{x})$ sur $C_\alpha(\delta(\tilde{x})) \cap \Omega_i$. Pour les mêmes raisons δ induit un difféomorphisme de $\tilde{\mathcal{F}}^-$ sur $C_\beta(\delta(\tilde{x})) \cap \Omega_i$. Finalement pour tout point $x \in \delta(\tilde{M})$, les chemins partant de x et tangents aux trois distributions $(\mathbb{R}Y_0, E^\alpha, E^\beta)$ se relèvent en tout point $\tilde{x} \in \delta^{-1}(x)$, donc selon le lemme 3.3.2, δ est bien un revêtement de \tilde{M} sur Ω_i . \square

3.3.3 L'application développante est un revêtement sur son image

On suppose à partir de maintenant que l'image de l'application développante est contenue dans l'un des ouverts Ω_1 ou Ω_2 , que l'on notera Ω_i , et on suppose par l'absurde que δ ne vérifie pas la condition (3.3.6), ie on suppose qu'il existe p dans Ω_i , et $\tilde{x} \in \delta^{-1}(p)$, tel que l'une des deux inclusions (3.3.6) est stricte. Nous allons expliquer la preuve dans le cas où la seconde inclusion est stricte, et le cas des feuilles instables et des cercles α est exactement le même (en étudiant le flot Anosov en temps $-\infty$ au lieu de l'étudier en temps $+\infty$). Puisqu'aucune confusion ne sera possible, nous noterons dans ce paragraphe $p_* = p_\beta^*$ (voir le paragraphe 3.3.1 pour cette définition), de sorte que :

$$C_\beta(p) \cap \Omega_i = C_\beta(p) \setminus \{p_*\} \simeq \mathbb{R}.$$

L'image $\delta(\tilde{\mathcal{F}}^-(\tilde{x}))$ est un intervalle de $C_\beta(p) \cap \Omega_i$ qui dépend de la pré-image \tilde{x} , et que nous noterons sous la forme d'un intervalle ouvert :

$$]\tilde{x}_- ; \tilde{x}_+[\subset C_\beta(p) \setminus \{p_*\}. \quad (3.3.7)$$

Quitte à échanger \tilde{x}_- et \tilde{x}_+ , l'hypothèse que nous faisons pour montrer le théorème 3.3.1 par l'absurde est donc :

Hypothèse 3.3.5. Il existe p dans Ω_i , et $\tilde{x} \in \delta^{-1}(p)$, tels que $\tilde{x}_+ \neq p_*$.

Nous allons en déduire une contradiction de la façon suivante. L'application développante est un difféomorphisme local, de sorte que l'on contrôle localement, pour \tilde{y} dans un voisinage compact \tilde{K} autour du point \tilde{x} , la « taille » de l'intervalle $]\tilde{y}_- ; \tilde{y}_+[$ (ceci est montré dans le lemme 3.3.8). Par compacité de M , on

va trouver des suites t_n convergeant vers $+\infty$ et $\gamma_n \in \pi_1(M)$ telles que $\delta(\gamma_n \tilde{\varphi}^{t_n}(\tilde{x}))$ converge dans Ω_i vers un point p_∞ . On note $g_n = \rho(\gamma_n \tilde{\varphi}^{t_n})$ les automorphismes de G_i associés, de sorte que par équivariance : $g_n \cdot p \rightarrow p_\infty$. L'idée est alors de se ramener à une suite de transformations de $\mathbb{R}P^1$, par une suite de cartes des cercles β passant par p_n , de différentielles bornées en p_n (ceci sera fait par le lemme 3.3.7). Cette suite de transformations de $\mathbb{R}P^1$ fixera deux points, ie sera une suite de transformations hyperboliques de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$. Or l'hypothèse $\tilde{x}_+ \neq p_*$, ainsi que le contrôle local de la taille de $]\tilde{y}_-; \tilde{y}_+[$, nous permettront de nous assurer que la norme des différentielles de ces transformations projectives ne converge pas vers 0 (ceci est montré par le lemme 3.3.6), ce qui entrera en contradiction avec la convergence vers 0 en norme des différentielles du flot Anosov φ^t le long des feuilles stables.

Notons $x := \pi_M(\tilde{x})$. Par compacité de M , il existe $t_n \rightarrow +\infty$ telle que $\varphi^{t_n}(x) = \pi_M(\tilde{\varphi}^{t_n}(\tilde{x}))$ converge vers un point x_∞ dans M . Or M est difféomorphe à $\pi_1(M) \setminus \tilde{M}$, d'où une suite γ_n dans $\pi_1(M)$ telle que, en notant $\tilde{x}_n := \gamma_n \cdot \tilde{\varphi}^{t_n}(\tilde{x})$, \tilde{x}_n converge vers un point $\tilde{x}_\infty \in \pi_M^{-1}(x_\infty)$. Alors en notant

$$g_n := \rho(\gamma_n \cdot \tilde{\varphi}^{t_n}), p_n := g_n \cdot p = \delta(\tilde{x}_n), p_\infty := \delta(\tilde{x}_\infty),$$

p_n converge vers p_∞ .

Nous fixons jusqu'à la fin de ce paragraphe des métriques riemaniennes quelconques sur Ω_i et sur $\mathbb{R}P^1$, vis à vis desquelles nous exprimons implicitement toutes les estimations sur les différentielles, et nous notons d_{Ω_i} et $d_{\mathbb{R}P^1}$ les distances induites (ou simplement d lorsqu'aucune confusion n'est possible).

Nous allons tout d'abord montrer que les deux résultats suivants nous permettent de terminer la preuve du théorème 3.3.1.

Lemme 3.3.6. *Soit A_n une suite de transformations de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe trois points distincts o, o_*, o_+ dans $\mathbb{R}P^1$, tels que pour l'action standard de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}P^1$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- o et o_* sont des points fixes de A_n pour tout n ;
- il existe une constante $\mu > 0$ telle que pour tout n : $d_{\mathbb{R}P^1}(A_n(o_+), o) \geq \mu$.

Alors la norme de la différentielle de A_n en o est minorée par une constante $C > 0$: $\|D_o A_n\| \geq C$.

Lemme 3.3.7. *Il existe des cartes $(c_n : C_\beta(p_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}P^1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $c : C_\beta(p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}P^1$, vérifiant les propriétés suivantes :*

- en notant $o := c(p)$ et $o_* := c(p_*)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n(p_n) = o$ et $c_n((p_n)_*) = o_*$;
- il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_1 \leq \|D_{p_n} c_n\| \leq C_2$;
- il existe une suite A_n dans $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ telle que $c_n \circ g_n \circ c^{-1} = A_n$ sur $\mathbb{R}P^1$, et telle qu'il existe une constante $\mu > 0$ pour laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_{\mathbb{R}P^1}(A_n(o_+), o) \geq \mu$.

Fin de la démonstration du théorème 3.3.1. Selon le lemme 3.3.7, le diagramme suivant est commutatif pour tout n :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}P^1 & \xleftarrow{c} & C_\beta(p) & \xleftarrow{\delta} & \tilde{\mathcal{F}}^-(\tilde{x}) & \xrightarrow{\pi_M} & \mathcal{F}^-(x) \\ \downarrow A_n & & \downarrow g_n & & \downarrow \gamma_n \cdot \tilde{\varphi}^{t_n} & & \downarrow \varphi^{t_n} \\ \mathbb{R}P^1 & \xleftarrow{c_n} & C_\beta(p_n) & \xleftarrow{\delta} & \tilde{\mathcal{F}}^-(\tilde{x}_n) & \xrightarrow{\pi_M} & \mathcal{F}^-(\varphi^{t_n}(x)) \end{array}$$

De plus selon le lemme 3.3.7 de nouveau, la suite $(A_n)_n$ de transformations de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ vérifie les hypothèses du lemme 3.3.6 (nous avons en effet remarqué au dernier paragraphe 3.3.1 que pour tout automorphisme g de Ω_i et pour tout point $p \in \Omega_i$, $g \cdot p_* = (g \cdot p)_*$), donc $(\|D_o A_n\|)_n$ ne tend pas vers 0. Puisque les différentielles de c_n en o sont bornées et par commutativité du diagramme ci-dessus, on en déduit que $(\|D_x(\varphi^{t_n}|_{\mathcal{F}^-(x)})\|)_n$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$, ce qui contredit la propriété de contraction des feuilles stables à l'infini du flot Anosov (φ^t) .

Ceci met en défaut l'hypothèse 3.3.5. Les égalités (3.3.6) sont donc bien vérifiées, et selon le corollaire 3.3.4, δ est un revêtement à valeurs dans Ω_i , ce qui termine la preuve du théorème 3.3.1. \square

Nous prouvons maintenant les deux lemmes précédent.

Démonstration du lemme 3.3.6. Par 2-transitivité de l'action de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}P^1$, on peut supposer sans perte de généralité (quitte à conjuguer $(A_n)_n$ dans $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$) que $o = \mathbb{R}e_1$ et $o_* = \mathbb{R}e_2$. Puisque $\text{Stab}_{\text{PGL}(2, \mathbb{R})}(o, o_*) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \pm 1/\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ agit transitivement sur l'ensemble des points différents de o et

de o_* , on peut également supposer sans perte de généralité que $o_+ = \mathbb{R}(1, 1)$. Puisque les A_n fixent o et o_* , $(A_n)_n$ est une suite de transformations hyperboliques de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \pm 1/\lambda_n \end{pmatrix}$, où $\lambda_n \neq 0$, or par hypothèse $d_{\mathbb{R}P^1}(A_n(o_+), o) = d_{\mathbb{R}P^1}(\mathbb{R}(\lambda_n, \pm 1/\lambda_n), \mathbb{R}(1, 0)) \geq \mu$, donc $(\lambda_n)_n$ est bornée. Or l'application A_n , lue en carte affine au voisinage de $o = \mathbb{R}e_1$, vaut $x \in]-\varepsilon; \varepsilon[\mapsto \pm x/\lambda_n^2$. Donc on en déduit bien que $(\|D_o A_n\|)_n$ est minorée par une constante $C > 0$. \square

Nous aurons besoin pour démontrer le lemme 3.3.7 du lemme suivant, qui nous permet de contrôler localement la « taille » de l'intervalle $]\tilde{y}_-; \tilde{y}_+[$.

Lemme 3.3.8. *Pour tout x dans Ω_i , et pour tout \tilde{x} dans $\delta^{-1}(x)$, il existe un voisinage relativement compact \tilde{K} de \tilde{x} , et $\mu > 0$, tels que δ induise un difféomorphisme de \tilde{K} sur la boule $B(x, \mu)$ de centre x et rayon μ de Ω_i , et tels que pour tout y dans $B(x, \mu)$, et pour tout \tilde{y} dans $\delta^{-1}(y) \cap \tilde{K}$, on ait :*

$$d_{\Omega_i}(y, \tilde{y}_+) > \mu, d_{\Omega_i}(y, \tilde{y}_-) > \mu.$$

Démonstration. On sait qu'un voisinage \tilde{K} et une boule $B(x, \mu)$ vérifiant la première hypothèse existent, car δ est un difféomorphisme local. On choisit de plus μ assez petit pour que la boule $B(x, \mu)$ soit un plongement d'une boule euclidienne (donc en particulier connexe). Soit maintenant y dans $B(x, \mu/2)$, et $\tilde{y} \in \delta^{-1}(y) \cap \tilde{K}$. Notons C la composante connexe de $C_\beta(y) \cap B(x, \mu)$ contenant y , c'est un intervalle de $]\tilde{y}_-; \tilde{y}_+[$ que nous notons $C =]y_1; y_2[$. Nous allons montrer que

$$d(y_1, x) = \mu, \text{ et } d(y_2, x) = \mu. \quad (3.3.8)$$

Ceci montrera en particulier que $d(\tilde{y}_-, y) \geq \mu/2$ et $d(\tilde{y}_+, y) \geq \mu/2$, et nous aurons donc bien montré le résultat voulu avec $\mu/2$ et $\tilde{K}' := (\delta|_{\tilde{K}})^{-1}(B(x, \mu/2))$.

Supposons par l'absurde que $d(y_1, x) < \mu$ (l'autre cas se traite de la même manière). Puisque $C_\beta(y) \cap \Omega_i$ n'est pas relativement compact (car homéomorphe à \mathbb{R}), l'intervalle $]y_1; y_2[$ est strictement inclus dans $C_\beta(y) \cap \Omega_i$, et l'hypothèse $d(y_1, x) < \mu$ impose donc que l'on puisse trouver \tilde{y}_1 dans $(B(x, \mu) \cap C_\beta(y)) \setminus]y_1; y_2[$ aussi proche que l'on veut de y_1 , ie finalement qu'on puisse trouver \tilde{y}_1 dans $C \setminus]y_1; y_2[$, ce qui contredit la définition de y_1 et y_2 . Ceci termine la preuve des égalités (3.3.8) annoncées, et donc la preuve du lemme. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme 3.3.7.

Démonstration du lemme 3.3.7. Notons H_i le sous-groupe de G_i qui agit simplement transitivement sur Ω_i , décrit dans la section 1.2.2 : $H_1 = \text{Heis}(3)$, et $H_2 = \text{SL}(2, \mathbb{R})$. Soit $(h_n)_n$ l'unique suite de H_i , telle que $h_n \cdot p = p_n = g_n \cdot p$. On choisit une carte c de $C_\beta(p)$ dans $\mathbb{R}P^1$, équivariante pour un morphisme $\phi : \text{Stab}_{G_i}(C_\beta(p)) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ du stabilisateur de $C_\beta(p)$ dans $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ (par exemple, on prend pour c la carte définie dans le paragraphe 3.3.1). On définit les cartes suivantes de $C_\beta(p_n)$ dans $\mathbb{R}P^1$:

$$c_n : y \mapsto c(h_n^{-1} \cdot y).$$

Ces cartes vérifient clairement la première hypothèse du lemme 3.3.7, et également la seconde car $(h_n)_n$ est relativement compacte dans H_i (puisque l'action de H_i sur Ω_i est simplement transitive, et que p_n converge). Remarquons que puisque $(h_n)_n$ est relativement compacte, les cartes c_n vérifient une contrainte plus forte que le contrôle des différentielles, elles vérifient la contrainte globale suivante : il existe une constante $C > 0$ (ne dépendant que de la suite p_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $q \in C_\beta(p_n)$ on ait l'inégalité

$$d_{\mathbb{R}P^1}(c_n(p_n), c_n(q)) \geq C d_{\Omega_i}(p_n, q). \quad (3.3.9)$$

Par ϕ -équivariance de la carte c , et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n^{-1}g_n \in \text{Stab}_{G_i}(p)$ stabilise en particulier le cercle $C_\beta(p)$, nous avons pour tout $q \in \mathbb{R}P^1$ l'égalité suivante :

$$c_n \circ g_n \circ c^{-1}(p) = c(h_n^{-1}g_n \cdot c^{-1}(q)) = \phi(h_n^{-1}g_n) \cdot q.$$

Les transformations projectives $A_n := \phi(h_n^{-1}g_n)$ vérifient donc par construction les relations voulues : $c_n \circ g_n \circ c^{-1} = A_n$, et $o := c(p)$ ainsi que $o_* := c(p_*)$ sont des points fixes de A_n pour tout n .

L'inégalité à vérifier découle du lemme 3.3.8 et de l'inégalité 3.3.9. On utilise le voisinage \tilde{K} de \tilde{x}_∞ dans \tilde{M} et le rayon $\mu > 0$ (ne dépendant que de \tilde{x}_∞) donnés par le lemme 3.3.8 pour \tilde{x}_∞ et p_∞ , et on suppose, quitte à prendre une suite extraite de $(\tilde{x}_n)_n$ et de $(p_n)_n$, que $(\tilde{x}_n)_n$ est contenue dans \tilde{K} et $(p_n)_n$ dans $B(p_\infty, \mu)$. La transformation g_n induit pour tout n un difféomorphisme de $\delta(\tilde{\mathcal{F}}^-(\tilde{x})) \cap \Omega_i$ sur $\delta(\tilde{\mathcal{F}}^-(\tilde{x}_n)) \cap \Omega_i$, donc $g_n \cdot \tilde{x}_+ = (\tilde{x}_n)_+$. Donc en notant $o_+ := c(\tilde{x}_+)$, on a $A_n(o_+) = c_n((\tilde{x}_n)_+)$, d'où : $d_{\mathbb{R}P^1}(A_n(o_+), o) = d_{\mathbb{R}P^1}(c_n((\tilde{x}_n)_+), c_n(p_n)) \geq C d_{\Omega_i}((\tilde{x}_n)_+, p_n) \geq C\mu$, où la première inégalité est due à (3.3.9), et la seconde au lemme 3.3.8. L'inégalité voulue est donc vérifiée pour la constante $C\mu$ (qui ne dépend que de la suite \tilde{x}_n), ce qui termine la preuve du lemme. \square

Remarque 3.3.9. Soulignons que dans les arguments développés dans ce dernier paragraphe, nous utilisons seulement l'existence d'une suite $t_n \rightarrow +\infty$ telle que $\varphi^{t_n}(\pi_M(\hat{x})) \rightarrow x_\infty$ dans M . Supposons que l'on étudie la situation un peu plus générale suivante : on étudie un flot discret non compact $(\varphi^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de difféomorphismes d'Anosov d'une variété compacte et connexe M de dimension trois, (voir la section 2.1 où cette notion est introduite), qui est un flot d'automorphismes d'une structure lagrangienne de contact plate sur M . Ce flot discret se relève alors, comme dans le cas étudié jusqu'à maintenant, en un flot $\tilde{\varphi}^k$ sur le revêtement universel \tilde{M} , et la preuve faite dans ce paragraphe fonctionne encore, et permet de montrer que dans ce cas plus général, si l'image de l'application développante est contenue dans un de ces deux ouverts, alors l'application développante de la (G, X) -structure sur M est un revêtement.

3.4 Élimination du cas de l'ouvert Ω_1

L'objectif de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant (on renvoie au paragraphe 1.2.2 pour la définition de l'ouvert de type Ω_1 standard).

Théorème 3.4.1. *Il n'existe pas de sous-groupe discret Γ de $\text{Heis}(3) \rtimes \mathbb{R}^*$ qui agisse librement proprement et cocompactement sur l'ouvert Ω_1 standard, et tel que le flot central de $\text{Heis}(3)$ passe au quotient en un flot Anosov sur le quotient $\Gamma \backslash \Omega_1$.*

Ce théorème nous permet d'éliminer le cas des ouverts de type Ω_1 .

Corollaire 3.4.2. *Soit (φ^t) un flot Anosov de contact en dimension trois, muni de sa $(\text{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\text{TRP}^2))$ -structure associée, et soit (ψ^t) le flot projectif défini par (φ^t) . Alors à conjugaison près dans $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$, l'image de l'application développante est contenue dans l'ouvert Ω_2 standard, il existe $\lambda \neq 0$ tel que :*

$$(\psi^t) = \left(\left[\begin{array}{ccc} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \right),$$

et le groupe d'holonomie est contenu dans :

$$C(\psi^t) = \left\{ \left[\begin{array}{ccc|c} a & c & 0 & \\ b & d & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right] \middle| ad - bc \neq 0 \right\} \simeq \text{GL}(2, \mathbb{R}).$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que l'on est dans le premier cas décrit au corollaire 3.2.9 : l'image de l'application développante est contenue dans l'ouvert Ω_1 standard, $(\psi^t) = (z^t)$ est le flot central de $\text{Heis}(3)$, et $C(\psi^t) = \text{Heis}(3) \rtimes \mathbb{R}^*$. Selon le théorème 3.3.1, la $(C(\psi^t), \Omega_1)$ -structure définie par (φ^t) est alors complète, donc puisque Ω_1 est simplement connexe (car muni d'une action simplement transitive de $\text{Heis}(3)$, difféomorphe à \mathbb{R}^3), selon la proposition 1.3.18 il existe un sous-groupe discret de $\text{Heis}(3) \rtimes \mathbb{R}^*$ qui contredit le théorème 3.4.1. Donc on est bien dans le second cas du corollaire 3.2.9. \square

Notations 3.4.3. On notera dans tout ce paragraphe Ω_1 l'ouvert standard de type 1, et

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & x \\ 0 & \lambda \end{array} \right) + \left[\begin{array}{c} z \\ y \end{array} \right] \middle| \lambda \in \mathbb{R}^*, x, y, z \in \mathbb{R}^3 \right\} \simeq \text{Heis}(3) \rtimes \mathbb{R}^*,$$

qui est un sous-groupe du groupe $\text{Stab}_{\text{PGL}(3, \mathbb{R})}(\Omega_1)$ des automorphismes de Ω_1 (voir le paragraphe 1.2.2 pour les définitions concernant Ω_1). De plus, on appellera *flot central du groupe de Heisenberg* et on notera $(z^t)_t$ le flot de translations à gauche par les éléments $\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\text{Heis}(3)$ (qui coïncide avec les translations à droite par les mêmes éléments car ces éléments sont centraux). On notera enfin $Z(\text{Heis}(3))$ le centre de $\text{Heis}(3)$.

On suppose par l'absurde à partir de maintenant que Γ est un sous-groupe discret de G vérifiant les hypothèses du théorème 3.4.1.

On démontre tout d'abord trois résultats annexes qui nous serviront par la suite.

Nous aurons besoin dans ce paragraphe à plusieurs reprises du lemme suivant, utilisant un argument de dimension cohomologique :

Lemme 3.4.4. *Γ ne contient pas de sous-groupe d'indice fini isomorphe à \mathbb{Z}^2 ou \mathbb{Z} .*

Démonstration. En effet, l'action sur Ω_1 de ce sous-groupe d'indice fini serait encore libre, propre et cocompacte selon le lemme B.1, or selon la proposition A.1 il n'existe pas d'action libre propre et cocompacte de \mathbb{Z} ni de \mathbb{Z}^2 , sur $\Omega_1 \simeq \mathbb{R}^3$. \square

Nous aurons également besoin d'en savoir plus sur G , et son algèbre de Lie

$$\mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & a & c \\ 0 & d & b \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^4 \right\}. \quad (3.4.1)$$

Proposition 3.4.5. 1. À action adjointe près de G , les éléments X non nuls de \mathfrak{g} sont de l'une des trois formes suivantes :

si $X \notin \mathfrak{heis}(3)$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $d \neq 0$;

si $X \in \mathfrak{heis}(3) \setminus \mathfrak{z}(\mathfrak{heis}(3))$: $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec a ou $b \neq 0$;

si $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{heis}(3))$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $c \neq 0$.

2. Les seules sous-algèbres abéliennes \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , de dimension strictement plus grande que 1, sont à action adjointe près de G de la forme suivante :

— \mathfrak{h} est contenue dans $\mathfrak{heis}(3)$

— $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

3. L'application exponentielle réalise un difféomorphisme de \mathfrak{g} sur $G^0 = \text{Heis}(3) \times \mathbb{R}^{+*}$, la composante neutre de G .

Démonstration. 1. Pour $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$ non nul, on adopte les notations suivantes :

$$g = \left(\begin{array}{c|c} P & C \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \text{ où } P \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*, x \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } C \in \mathbb{R}^2, X = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \text{ où } X_1 \in \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \text{ et } X_2 \in \mathbb{R}^2,$$

et avec ces notations, on a la relation suivante que l'on utilisera par la suite :

$$gXg^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} PX_1P^{-1} & -PX_1P^{-1}C + PX_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right). \quad (E)$$

On utilise également pour X la notation définie par l'équation (3.4.1).

Supposons d'abord que $X \notin \mathfrak{heis}(3)$, ie $d \neq 0$. Alors X_1 a une valeur propre non nulle, donc il existe $P \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ tel que $PX_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, et puisque le premier vecteur de la base canonique est déjà un vecteur propre de X_1 , on peut choisir P triangulaire supérieure, et on peut même choisir P de la forme $P = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (quitte à multiplier P par une matrice de dilatation $\begin{pmatrix} 1/\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$). Puisque l'image de PX_1P^{-1} est $\mathbb{R}e_2$ et selon la formule (E), en choisissant un $C = \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ convenable, on peut finalement trouver $g \in G$ tel que $Ad(g) \cdot X = gXg^{-1}$ est de la forme annoncée dans le premier cas.

Supposons maintenant que $X \in \mathfrak{heis}(3) \setminus \mathfrak{z}(\mathfrak{heis}(3))$, ie $d = 0$ et a ou $b \neq 0$. Si $a \neq 0$ alors $P = id$ convient et l'image de $-X_1$ est $\mathbb{R}e_1$, donc de nouveau selon la formule (E) on peut trouver $C \in \mathbb{R}^2$ tel que gXg^{-1} est de la forme annoncée dans le second cas. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors n'importe quel P de la forme demandée convient, et puisque $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\}$ agit transitivement sur les droites de \mathbb{R}^2 différentes de $\mathbb{R}e_1$, il existe également $g \in G$ tel que gXg^{-1} est de la forme annoncée dans le second cas.

Le troisième cas est simplement la définition de $\mathfrak{z}(\mathfrak{heis}(3))$.

2. Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre abélienne de \mathfrak{g} de dimension 2, et non contenue dans $\mathfrak{heis}(3)$. Alors il existe X dans $\mathfrak{h} \setminus \mathfrak{heis}(3)$, et Y dans $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{heis}(3)$, tels que $\mathfrak{h} = \text{Vect}(X, Y)$. Un calcul rapide montre que la relation $[X, Y] = 0$ impose que Y est dans le centre de $\mathfrak{heis}(3)$, donc selon la classification ci-dessus, à action adjointe près de G on peut supposer X de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi \mathfrak{h} est bien de la forme annoncée.

Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe une sous-algèbre abélienne \mathfrak{h} de \mathfrak{g} de dimension 3. Alors \mathfrak{h} n'est pas contenue dans $\mathfrak{heis}(3)$ (car $\mathfrak{heis}(3)$ n'est pas abélienne), donc il existe X et Y linéairement indépendants dans $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{heis}(3)$, et Z dans $\mathfrak{h} \setminus \mathfrak{heis}(3)$, tels que $\mathfrak{h} = \text{Vect}(X, Y, Z)$. Comme on l'a vu dans le cas précédent, les relations $[X, Z] = 0$ et $[Y, Z] = 0$ imposent que X et Y sont dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{heis}(3))$, ce qui contredit le fait que X et Y soient linéairement indépendants. Il n'existe donc pas de sous-algèbre abélienne de \mathfrak{g} de

dimension 3, et nous avons bien prouvé l'alternative annoncée.

3. Il suffit pour prouver cette troisième affirmation de vérifier la formule suivante, pour $X = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & d & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$:

$$\exp(X) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e^\lambda - 1}{\lambda} a & \frac{e^\lambda - \lambda - 1}{\lambda^2} ab + c \\ 0 & e^\lambda & \frac{e^\lambda - 1}{\lambda} b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit immédiatement que l'application exponentielle réalise, comme annoncé, un difféomorphisme de \mathfrak{g} sur G^0 . \square

Nous aurons enfin besoin du lemme suivant sur les sous-groupes de $\text{Heis}(3)$.

Lemme 3.4.6. *Soit Γ un sous-groupe discret non trivial de $\text{Heis}(3)$, d'intersection triviale avec $Z(\text{Heis}(3))$. Alors il existe $X \in \mathfrak{heis}(3) \setminus \mathfrak{z}(\mathfrak{heis}(3))$ tel que $\Gamma = \{\exp(kX)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.*

Démonstration. Notons $p: \text{Heis}(3) \rightarrow \mathbb{R}^2$ le morphisme de groupe surjectif défini par

$$p: \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, la restriction de p à Γ est injective. Si par l'absurde $p(\Gamma)$ contenait deux vecteurs linéairement indépendants de \mathbb{R}^2 , en notant A et B les matrices de $\text{Heis}(3)$ telles que $p(A)$ et $p(B)$ sont linéairement indépendants, un calcul rapide montre que le commutateur de A et B appartient au centre et est non trivial, ce qui contredit l'hypothèse faite sur Γ . Ainsi $p(\Gamma)$ est contenu dans un sous-groupe à un paramètre de \mathbb{R}^2 , ce qui impose que Γ est également contenu dans un sous-groupe à un paramètre de $\text{Heis}(3)$ (car si Γ contient $\gamma = \exp(X)$ et $\gamma' = \exp(X')$ avec X et X' non colinéaires, alors $Dp(X)$ et $Dp(X')$ sont non colinéaires puisque Γ est d'intersection triviale avec le centre, et donc $p(\Gamma)$ contient $p(\gamma) = Dp(X)$ et $p(\gamma') = Dp(X')$ non colinéaires, ce qui est impossible comme on vient de le voir). Or Γ est discret, donc puisqu'il est contenu dans un sous-groupe isomorphe à \mathbb{R} , il est trivial ou isomorphe à \mathbb{Z} et engendré par un élément $\exp(X)$, avec $X \in \mathfrak{heis}(3)$. \square

Nous utilisons maintenant les propriétés du flot Anosov pour montrer une première propriété de Γ .

Lemme 3.4.7. *Si Γ vérifie les hypothèses du théorème 3.4.1, alors l'intersection de Γ avec $Z(\text{Heis}(3))$ est triviale.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que Γ contient un élément de la forme $z^T = id + \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}$, avec $T \neq 0$. Notons \tilde{z}^t le flot défini sur le quotient $\Gamma \backslash \Omega_1$ par le flot central $(z^t)_t$ de $\text{Heis}(3)$ agissant sur Ω_1 , ie \tilde{z}^t vérifie la relation $\pi \circ z^t = \tilde{z}^t \circ \pi$, en notant $\pi: \Omega_1 \rightarrow \Gamma \backslash \Omega_1$ la projection canonique (soulignons que cette relation définit bien un flot sur le quotient, car z^t est central dans G donc commute avec Γ). Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, par hypothèse il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $z^{t+T} = \gamma z^t$, donc $(\tilde{z}^t)_t$ est périodique, et ne peut donc pas être un flot Anosov (en effet, les normes des différentielles d'un flot périodique ne peuvent pas diverger à l'infini). \square

Notons $p_2: G_1 \rightarrow \mathbb{R}^*$ la projection sur le second facteur de $\text{Heis}(3) \rtimes \mathbb{R}^*$, définie par

$$p: \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \mapsto \lambda,$$

et notons N le noyau de ce morphisme restreint à Γ , ie $N = \Gamma \cap \text{Heis}(3)$. Soulignons que N est en particulier un sous-groupe distingué de Γ . Nous allons chercher à décrire N .

Corollaire 3.4.8. *$N = \Gamma \cap \text{Heis}(3)$ est de la forme $N = \{\exp(kX)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ avec $X \in \mathfrak{heis}(3) \setminus \mathfrak{z}(\mathfrak{heis}(3))$. En particulier, N est isomorphe à \mathbb{Z} et d'indice infini dans Γ .*

Démonstration. Il suffit de montrer que N est non trivial. En effet, le lemme précédent indique que N est alors un sous-groupe discret de $\text{Heis}(3)$ d'intersection triviale avec le centre, donc N est de la forme annoncée selon le lemme 3.4.6, et selon le lemme 3.4.5 il est donc nécessairement d'indice infini dans Γ .

Supposons par l'absurde que N est trivial. La projection p_2 est alors injective en restriction à Γ , donc Γ est isomorphe à son image dans \mathbb{R}^* , donc est en particulier abélien. Notons H la composante neutre de l'adhérence de Zariski de Γ dans G , que nous notons $\bar{\Gamma}^Z$. H est encore abélien car Γ l'est, c'est donc un sous-groupe fermé connexe et abélien de G . De plus puisque les groupes algébriques ont un nombre fini de composantes connexes, on sait que H est d'indice fini dans $\bar{\Gamma}^Z$, et donc $\Gamma' := \Gamma \cap H$ est également d'indice

fini dans $\Gamma = \Gamma \cap \overline{\Gamma}^{\mathbb{Z}}$. Selon la deuxième affirmation de la proposition 3.4.5, quitte à conjuguer Γ dans G , on peut donc supposer que H est le sous-groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R}_*^+, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Donc Γ' est un sous-groupe discret d'un groupe isomorphe à \mathbb{R}^2 , donc est isomorphe à \mathbb{Z} ou à \mathbb{Z}^2 , ce qui contredit le lemme 3.4.4, car Γ' est d'indice fini dans Γ . \square

Proposition 3.4.9. *Quitte à conjuguer Γ dans G , on peut supposer que l'on est dans l'un des deux cas suivants :*

1.

$$\Gamma < \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R}^*, y, z \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

et dans ce cas

$$N = \left(id + \begin{bmatrix} 0 \\ bk \end{bmatrix} \right)_{k \in \mathbb{Z}}, b \in \mathbb{R}^*.$$

2.

$$\Gamma < \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R}^*, x, z \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

et dans ce cas

$$N = \left(id + \begin{bmatrix} ak \\ 0 \end{bmatrix} \right)_{k \in \mathbb{Z}}, a \in \mathbb{R}^*.$$

De plus dans tous les cas, N est contenu dans la composante neutre de G , et le centralisateur de N dans G est N lui-même.

Démonstration de la proposition 3.4.9. Selon la classification 3.4.5, quitte à conjuguer Γ dans G , on peut supposer que l'élément $X \in \mathfrak{heis}(3)$ donné par le lemme 3.4.8 est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec a ou b non nul, et N est alors égal à $\{\exp(kX)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Puisque N est distingué dans Γ et contenu dans la composante neutre de G , on en déduit que pour tout $g \in \Gamma$, $gXg^{-1} \in \mathbb{Z}X$. Pour $g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \in \Gamma$, on vérifie facilement le calcul suivant :

$$gXg^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1}a & bx - \lambda^{-1}ya \\ 0 & 0 & \lambda b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E})$$

Si a et b sont tous deux non nuls, on en déduit que $\lambda = \pm 1$ pour tout $g \in G$, donc Γ est contenu dans $\text{Heis}(3) \rtimes \{\pm 1\}$, et en particulier $N = \Gamma \cap \text{Heis}(3)$ est d'indice fini dans Γ , ce qui contredit le lemme 3.4.4. Ainsi, a ou $b = 0$.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$, le calcul (E) impose $x = 0$ pour tout $g \in \Gamma$, et on est donc dans le premier cas de la proposition. Si $b = 0$ et $a \neq 0$, ce même calcul impose $y = 0$ pour tout $g \in \Gamma$, ce qui donne le second cas de la proposition.

De plus $g \in \Gamma$ centralise N si et seulement si $gXg^{-1} = X$, ie si et seulement si $g \in \text{Heis}(3)$ selon le calcul (E). Donc on a bien $Z_{\Gamma}(N) = \Gamma \cap \text{Heis}(3) = N$. \square

Le lemme qui suit va nous permettre de terminer la démonstration.

Lemme 3.4.10. *Soit G un groupe, et N un sous-groupe distingué dans G isomorphe à \mathbb{Z} . Alors le centralisateur de N dans G est d'indice au plus 2 dans G .*

Démonstration. En effet pour $g \in G$, g agit par conjugaison sur N par automorphismes de N , puisque N est distingué, d'où un morphisme $\phi: g \in G \rightarrow \Gamma_g \in \text{Aut}(N)$, et puisque N est isomorphe à \mathbb{Z} , $\text{Aut}(N) \simeq \text{Aut}(\mathbb{Z}) = \{\pm id\}$ est de cardinal 2 (en effet ± 1 sont les seuls générateurs de \mathbb{Z} , donc pour être surjectif un automorphisme de \mathbb{Z} doit envoyer 1 sur ± 1). Or le centralisateur de N dans G est exactement le noyau de ce morphisme ϕ , donc le quotient $Z_G(N) \backslash G = \text{Ker } \phi \backslash G \simeq \text{Im } \phi < \{\pm id\}$ est de cardinal au plus deux, d'où le résultat. \square

Fin de la démonstration du théorème 3.4.1. Selon la proposition 3.4.9 le centralisateur de N dans Γ est égal à N , et selon la proposition 3.4.8 N est isomorphe à \mathbb{Z} , donc puisque N est distingué dans Γ , selon le lemme ci-dessus N est d'indice au plus deux dans Γ , ce qui contredit le lemme 3.4.8. Donc un sous-groupe vérifiant les hypothèses du théorème 3.4.1 n'existe pas, ce qui termine la démonstration du théorème 3.4.1. \square

3.5 Fin de la preuve

Nous terminons dans ce paragraphe la preuve du théorème 2.2.21.

3.5.1 Fin de la réduction de la $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2))$ -structure

En notant U un groupe de Lie connexe quelconque d'algèbre de Lie \mathfrak{sl}_2 (en particulier, U peut être $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ou $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$), et en utilisant le *flot hyperbolique standard* $a^t = \exp(tH)$ de U introduit à la définition 2.2.13, nous définissons maintenant une action de $U \times \mathbb{R}$ sur U en faisant agir le facteur U par translations à gauche, et le facteur \mathbb{R} par les translations à droite par le flot a^t , ie en formule :

$$(g, \lambda) \cdot x = gxa^\lambda, \forall x \in U. \quad (3.5.1)$$

Notons en particulier que le flot hyperbolique standard (a^t) sur U (ou sur tout quotient de U) se traduit avec cette définition par l'action du flot $(0, t)$. Nous soulignons de plus que par définition, les revêtements $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sont équivariants pour ces actions (et vis à vis des morphismes associés $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ et $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$).

On termine dans le théorème ci-dessous la réduction de la (G, X) -structure définie par le flot Anosov φ^t sur M : nous allons montrer que dans le cas d'un flot Anosov de contact, la distribution lagrangienne de contact $E^+ \oplus E^-$ définie par le flot se réduit à une $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$ -structure, pour l'action définie précédemment. Nous rappelons en vue de ce théorème que selon la remarque 1.3.19, la donnée d'une $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$ -structure est équivalente à celle d'une $(\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}))$ -structure.

Théorème 3.5.1. *Soit (φ^t) un flot Anosov de contact sur une variété M de dimension trois, compacte connexe et orientable. Alors (φ^t) définit sur M une $(\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}))$ -structure complète. De plus, en notant $\tilde{\Gamma} < \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ son groupe d'holonomie, $\tilde{\Gamma}$ est un sous-groupe discret agissant librement proprement et cocompactement sur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, et il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que le flot (φ^t) sur M est conjugué au flot hyperbolique $(a^{\lambda t}) = ((0, \lambda t))$ sur le quotient $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$.*

Remarques 3.5.2. 1. En particulier, ce théorème montre que la classe de conjugaison du morphisme d'holonomie $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ des $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$ -structures associées aux flots Anosov de contact en dimension trois est un invariant de conjugaison C^0 de ces flots, et que cet invariant est *complet*, ie :

- si deux flots Anosov de contact en dimension trois sont C^0 -conjugués, alors les holonomies de leurs $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$ -structures sont conjuguées ;
- si leurs holonomies sont conjuguées, alors les flots sont C^∞ -conjugués.

2. Soulignons qu'un flot hyperbolique $((0, \lambda t))$ est bien défini sur le quotient $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, car le sous-groupe $\tilde{\Gamma}$ est le groupe d'holonomie de la $(\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}))$ -structure sur M , donc centralise le flot $((0, \lambda t))$.

Démonstration. Selon le corollaire 3.4.2, quitte à conjuguer dans $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$: l'application développante est à valeurs dans l'ouvert Ω_2 standard, le flot (φ^t) est le flot défini sur la $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{P}(\mathrm{TRP}^2))$ -variété M par le flot projectif

$$\psi^t = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \quad (3.5.2)$$

sur Ω_2 , et le groupe d'holonomie est contenu dans le sous-groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \equiv \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$

de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$. De plus, puisque M est orientable son groupe fondamental agit sur \tilde{M} par des difféomorphismes préservant l'orientation, donc pour $\gamma \in \pi_1(M)$ le difféomorphisme $\rho(\gamma) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ préserve l'orientation de Ω_2 (car il est localement conjugué à γ par l'application développante), et on vérifie facilement que cela signifie exactement qu'il est de déterminant positif. Donc on sait plus précisément que le groupe d'holonomie est contenu dans $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$. L'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur Ω_2 est simplement transitive, et son application orbitale induit un difféomorphisme de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur Ω_2 , dont on vérifie facilement qu'il est $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R})$ -équivariant pour l'action à droite et à gauche de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ définie au début du paragraphe, et pour celle de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, identifié à $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ par l'isomorphisme $(g, \lambda) \mapsto e^\lambda g$, sur Ω_2 . De plus cette application

orbitale conjugué le flot (ψ^t) défini par l'équation (3.5.2) au flot hyperbolique $(0, \lambda t)$ sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Donc M est finalement une $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$ -variété, et le flot (φ^t) sur M est le flot défini par le flot hyperbolique $(0, \lambda t)$ sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. La $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$ -structure de M est complète selon le théorème 3.3.1, donc puisque $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ n'est pas simplement connexe, on en déduit que M est isomorphe comme $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$ -variété à un quotient $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ par un sous-groupe discret $\tilde{\Gamma}$ de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ agissant librement proprement et cocompactement (voir la remarque 1.3.19 qui traite le cas non simplement connexe de la complétude). De plus cet isomorphisme conjugué le flot Anosov de contact (φ^t) au flot hyperbolique $(0, \lambda t)$ sur $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$. \square

3.5.2 Topologie de M

Pour terminer la classification des flots Anosov en dimension trois, on souhaiterait se ramener au cas des espaces homogènes, plus connu et plus naturel que celui des quotients par des actions à droite et à gauche simultanées. Nous notons à partir de maintenant $\tilde{\Gamma} < \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ le sous-groupe discret dont il est question dans le théorème 3.5.1, tel que M est difféomorphe à $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, et nous notons $\tilde{\Gamma}_0$ sa projection sur le facteur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$.

Théorème 3.5.3. $\tilde{\Gamma}_0$ est un sous-groupe discret cocompact de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, $\tilde{\Gamma}$ est le graphe d'un morphisme $\tilde{\rho}: \tilde{\Gamma}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ au dessus de $\tilde{\Gamma}_0$, et le quotient de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ par $\tilde{\Gamma}$ est difféomorphe à l'espace homogène $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$.

Nous appellerons également parfois un morphisme $\tilde{\rho}: \tilde{\Gamma}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ une *représentation*, et nous noterons $gr(\tilde{\Gamma}_0, \tilde{\rho}) = \{(\tilde{\gamma}, \tilde{\rho}(\tilde{\gamma})) \mid \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}_0\}$ le *graphe* de $\tilde{\rho}$.

Décrivons tout d'abord la stratégie de la démonstration du théorème 3.5.3, avant de rentrer dans les détails.

Une fois montré que $\tilde{\Gamma}$ est le graphe d'un morphisme $\tilde{\rho}: \tilde{\Gamma}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, l'idée sera de montrer que la topologie du quotient ne change pas si l'on modifie légèrement la représentation en question. Concrètement, on utilise le chemin continu $(\tilde{\rho}_s := s\tilde{\rho})_{s \in [0;1]}$ de représentations de la représentation triviale à $\tilde{\rho}$, et en notant $\tilde{\Gamma}_s := gr(\tilde{\Gamma}_0, \tilde{\rho}_s)$ le graphe de $\tilde{\rho}_s$, on considère le produit fibré $P = \tilde{\Gamma}_0 \backslash (\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times [0;1])$, où $\tilde{\Gamma}_0$ agit à gauche par :

$$\gamma \cdot (g, s) := ((\gamma, \tilde{\rho}_s(\gamma)) \cdot g, s),$$

qui est un fibré au dessus de $[0;1]$, la fibre de s étant le quotient $\tilde{\Gamma}_s \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$. Il suffit alors de considérer le flot local d'un champ de vecteurs au dessus de $\frac{\partial}{\partial s}$ pour montrer que pour s petit, la topologie de $\tilde{\Gamma}_s \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ ne change pas.

Il reste seulement à pouvoir définir la variété P en question, ce qui demande de savoir que les groupes-graphes $\tilde{\Gamma}_s$ agissent proprement, librement et cocompactement. Pour cela, la seconde idée importante est de se ramener au cas de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, dont les actions propres ont été assez étudiées¹⁶, ce qui en fait un cadre plus propice pour les questions que nous nous posons. Nous montrerons que la projection Γ de $\tilde{\Gamma}$ sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ est également un sous-groupe discret, puis que la représentation $\tilde{\rho}$ passe au quotient sur Γ_0 , la projection de Γ sur le facteur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, de sorte que Γ est également le graphe d'une représentation ρ au dessus de Γ_0 .

On pourra alors faire tout le travail dans le cadre de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$: nous montrerons que Γ_0 est un sous-groupe discret, et que les groupes-graphes Γ_s des représentations $\rho_s := s\rho$ agissent proprement sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Il sera enfin facile de « remonter » ces résultats à $\tilde{\Gamma}_0$ et $\tilde{\Gamma}_s$.

Tout d'abord, vérifions que :

Lemme 3.5.4. $\tilde{\Gamma}$ est le graphe d'un morphisme $\tilde{\rho}: \tilde{\Gamma}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ au dessus de $\tilde{\Gamma}_0$.

Démonstration. Il suffit pour cela de montrer que la projection $\tilde{\rho}_1|_{\tilde{\Gamma}}: \tilde{\Gamma} \rightarrow \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ est injective. Puisque son noyau est un sous-groupe discret de \mathbb{R} , il est trivial ou de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$. Mais dans le second cas, on en déduirait que le flot Anosov est périodique, ce qui est impossible. Donc $\tilde{\rho}_1$ est bien injective. \square

Nous nous intéressons maintenant à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Nous notons

$$\pi: \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$$

¹⁶ En grande partie car $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ muni de sa forme de Killing est l'un des modèles de la géométrie anti-de-Sitter, c'est à dire lorentzienne et à courbure négative constante, en dimension 3.

la projection canonique, qui est un revêtement de groupes de Lie, dont le noyau est le centre de $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$, qui est un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z} que nous noterons Z . Nous noterons de plus

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \quad (3.5.3)$$

le sous-groupe à un paramètre hyperbolique de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ provenant des matrices diagonales de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$,

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.5.4)$$

le sous-groupe à un paramètre parabolique provenant des matrices triangulaires supérieures, $K = \text{PSO}(2, \mathbb{R})$ (c'est un sous-groupe compact maximal de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$), et nous utiliserons par la suite la *décomposition d'Isawawa* de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$:

$$\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = KAN = KNA.$$

En particulier, on déduit de cette décomposition qu'un sous-groupe à un paramètre hyperbolique n'est pas cocompact, car ces derniers sont tous conjugués à A , or $\text{PSL}(2, \mathbb{R})/A = KN$ et N n'est pas compact (on peut également invoquer le résultat A.2 de dimension cohomologique pour montrer que A n'est pas cocompact). Enfin, nous noterons parfois pour alléger les notations les matrices diagonales sous la forme suivante : $\text{Diag}(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Nous allons introduire deux fonctions définies sur $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, et en déduire des critères de propreté sur l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ sur $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Nous allons pour cela utiliser l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ par isométries sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 , vu ici comme le demi-plan complexe $\{\text{Im}(z) < 0\}$ muni de la métrique riemannienne $dx^2 + dy^2/|y|^2$ et de la distance $d_{\mathbb{H}^2}$ induite. Les résultats 3.5.7, 3.5.8 et 3.5.9 utilisés dans la suite de ce paragraphe sont dus à François Salein dans sa thèse [Sal99] (et la proposition 3.5.10 est une conséquence de résultats plus généraux prouvés dans cette même thèse). Le travail de Salein porte de façon générale sur les quotients compacts de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ par des sous-groupes de $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, et la situation que nous étudions ici étant très particulière et demandant moins de travail, nous avons préféré adapter les résultats et leur preuve à notre situation.

Définition 3.5.5 (Fonction l et fonction t). On définit une fonction $l: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}), l(g) = d_{\mathbb{H}^2}(i, g(i))/2.$$

Et pour γ un élément hyperbolique de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, on définit $t(\gamma)$ l'unique réel tel que γ est conjugué dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ à $\begin{bmatrix} e^{t(\gamma)} & 0 \\ 0 & e^{-t(\gamma)} \end{bmatrix}$.

Remarque 3.5.6. La fonction t est bien définie car on vérifie que les matrices diagonales de la forme ci-dessus sont deux à deux non conjuguées. En d'autres termes, elles fournissent une famille complète de représentants des classes de conjugaison des éléments hyperboliques de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

Propriété 3.5.7 (Propriétés des fonctions l et t). 1. Pour tous $g_1, g_2, g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, on a :

$$l(g_1 g_2) \leq l(g_1) + l(g_2), l(g^{-1}) = l(g). \quad (3.5.5)$$

2. Pour $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, $l(g) = u$ si et seulement si il existe $k_1, k_2 \in \text{PSO}(2, \mathbb{R})$ tels que :

$$g = k_1 \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{pmatrix} k_2. \quad (3.5.6)$$

3. Pour $\gamma \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ hyperbolique, $t(\gamma) = \inf_{x \in \mathbb{H}^2} d_{\mathbb{H}^2}(x, \gamma(x))/2$.

4. Pour tout γ hyperbolique dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, $t(\gamma) \leq l(\gamma)$.

5. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Alors $l(g) = \ln(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2} + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2})$.

6. Soit $g_1 \in A$, et g_2 un élément hyperbolique de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ n'appartenant pas à A . Alors on a l'estimation suivante :

$$l(\gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2}) = n_1 t(\gamma_1) + n_2 t(\gamma_2) + \frac{O(1)}{n_1, n_2 \rightarrow +\infty}. \quad (3.5.7)$$

Démonstration. 1. Nous laissons la démonstration des deux premières propriétés aux lecteurs-trices (elles se déduisent facilement de la sous-additivité de la distance $d_{\mathbb{H}^2}$ et de son invariance par les isométries de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$).

2. Soit $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, notons $u = l(g)$. On vérifie que $d_{\mathbb{H}^2}((\begin{smallmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{smallmatrix})(i), i) = 2u$, et puisque le cercle hyperbolique de centre i et rayon $2u$ est homogène sous l'action du stabilisateur de i qui est $\mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$, on en déduit l'existence de $k_1 \in \mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$ tel que $g(i) = k_1 (\begin{smallmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{smallmatrix})(i)$. Donc $g^{-1}k_1 \mathrm{Diag}(e^u, e^{-u})$ stabilise i , et on en déduit finalement l'existence de $k_2 \in \mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$ tel que

$$g = k_1 \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{pmatrix} k_2.$$

Réciproquement, les arguments développés montrent que si $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ s'écrit sous la forme (3.5.6), alors $l(g) = u$.

3. On sait en effet que pour toute matrice diagonale $a \in A$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$: $d(i, a(i)) = 2t(a)$, et on vérifie d'autre part que le minimum de $d_{\mathbb{H}^2}(x, a(x))$ est atteint en i . On en déduit si $\gamma = gag^{-1}$ avec $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, que : $d_{\mathbb{H}^2}(x, \gamma(x)) = d_{\mathbb{H}^2}^2(g^{-1}(x), a(g^{-1}(x))) \geq d(i, a(i)) = 2t(a) = 2t(\gamma)$ pour tout $x \in \mathbb{H}^2$. D'autre part $d(g(i), \gamma(g(i)))/2 = d(i, a(i))/2 = t(a) = t(\gamma)$, ce qui prouve finalement la propriété annoncée.

4. Cette inégalité découle de la définition de l et de la caractérisation ci-dessus de t .

5. En écrivant $g = R_\theta \mathrm{Diag}(e^u, e^{-u}) R_{\theta'}$ avec R_θ et $R_{\theta'}$ des matrices de rotations dans $\mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$, on calcule que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^{2u} + e^{-2u} = 2 \cosh(2u) = 4 \cosh^2(u) - 2$, et on conclut en utilisant l'identité : $\mathrm{arccosh}(x) = \ln(\cosh(x) + \sqrt{\cosh^2(x) - 1})$.

6. Notons $g_1 = \mathrm{Diag}(e^{u_1}, e^{-u_1})$, $g_2 = p \mathrm{Diag}(e^{u_2}, e^{-u_2}) p^{-1}$ avec $p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, et $g = g_1^{n_1} p \mathrm{Diag}(e^{u_2}, e^{-u_2})^{n_2}$ que nous notons $g = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. On vérifie facilement le calcul suivant : $a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 = e^{2n_1 u_1 + 2n_2 u_2} (a^2 + b^2 e^{-4n_2 u_2} + c^2 e^{-4n_1 u_1} + d^2 e^{-4n_1 u_1 - 4n_2 u_2})$. Or selon la formule démontrée précédemment :

$$\ln(2\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 - 2}) \leq l(g) \leq \ln(2\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 + 2}),$$

et selon les deux premières propriétés (3.5.5) :

$$l(g) - l(p) \leq l(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) \leq l(g) + l(p),$$

donc on obtient finalement les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \ln(a^2 + b^2 e^{-4n_2 u_2} + c^2 e^{-4n_1 u_1} + d^2 e^{-4n_1 u_1 - 4n_2 u_2} - 2e^{-2n_1 u_1 - 2n_2 u_2}) - l(p) \\ \leq l(g_1^{n_1} g_2^{n_2}) - (n_1 u_1 + n_2 u_2) \leq \\ \ln(a^2 + b^2 e^{-4n_2 u_2} + c^2 e^{-4n_1 u_1} + d^2 e^{-4n_1 u_1 - 4n_2 u_2} + 2e^{-2n_1 u_1 - 2n_2 u_2}) + l(p). \end{aligned}$$

Or, puisque g_1 et g_2 ne sont pas dans le même groupe à un paramètre (ie n'ont aucun point fixe commun sur $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$), aucun des coefficients de p ne s'annule, donc en particulier $a \neq 0$ et on déduit des inégalités ci-dessus l'estimation annoncée. \square

Enfin, pour $\gamma = (g, (\begin{smallmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{smallmatrix})) \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, on note $l(\gamma) := l(g)$ et $u(\gamma) := u$. Nous pouvons maintenant énoncer les critères de propriété spécifiques à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ qui nous seront utiles.

Lemme 3.5.8. 1. Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. L'action de Γ sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est propre si, et seulement si, pour toute suite $(\gamma_n)_n$ partant à l'infini dans Γ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |l(\gamma_n) - |u(\gamma_n)|| = +\infty. \quad (3.5.8)$$

2. Soit $\Gamma = \mathrm{gr}(\Gamma_0, \rho) < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ le graphe d'une représentation ρ au dessus d'un sous-groupe discret sans torsion et cocompact Γ_0 de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Supposons que Γ agit proprement sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Alors :

- tous les éléments de Γ_0 sont hyperboliques, et Γ_0 n'est contenu dans aucun sous-groupe à un paramètre hyperbolique de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$;
- la représentation ρ n'est pas injective ;
- et pour tout $\gamma \in \Gamma_0$:

$$l(\gamma) > |\rho(\gamma)|. \quad (3.5.9)$$

Démonstration. 1. Supposons l'action de Γ propre, et soit γ_n une suite partant à l'infini dans Γ . Alors il existe k_n^1, k_n^2 deux suites relativement compactes de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $J = \mathrm{Id}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Rot}(\pi/2)$ tels que $\gamma_n = (k_n^1 \mathrm{Diag}(e^{l(\gamma_n)}, e^{-l(\gamma_n)}) k_n^2, J^{-1} \mathrm{Diag}(e^{-|u(\gamma_n)|}, e^{|u(\gamma_n)|}) J)$, et par propriété de l'action la suite $\gamma_n \cdot k_n^2{}^{-1} J =$

$k_n^1 \text{Diag}(e^{l(\gamma_n)-|u(\gamma_n)|}, e^{-l(\gamma_n)+|u(\gamma_n)|})J$ part à l'infini. On obtient donc la limite (3.5.8) annoncée.

Supposons réciproquement que pour toute suite γ_n de Γ partant à l'infini, on ait la limite annoncée, et considérons $\gamma_n = (g_n, \text{Diag}(e^{u_n}, e^{-u_n}))$ une telle suite, et x_n une suite relativement compacte de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Les propriétés (3.5.5) de la fonction l nous permettent d'obtenir les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} l(g_n x_n \text{Diag}(e^{u_n}, e^{-u_n})) &\geq l(g_n) - |u_n| - l(x_n), \\ l(g_n x_n \text{Diag}(e^{u_n}, e^{-u_n})) &\geq |u_n| - l(g_n) - l(x_n), \end{aligned}$$

donc on a finalement :

$$l(\gamma_n \cdot x_n) \geq |l(\gamma_n) - |u(\gamma_n)|| - l(x_n). \quad (3.5.10)$$

Or la sous-additivité de l ainsi que la propriété (3.5.6) qu'elle vérifie imposent que l est bornée sur les parties relativement compactes, donc $l(x_n)$ est bornée. L'inégalité (3.5.10) obtenue ainsi que l'hypothèse (3.5.8) imposent alors que $l(\gamma_n \cdot x_n)$ diverge, ce qui signifie que $\gamma_n \cdot x_n$ sort de tout compact. Nous avons donc bien montré que l'action de Γ est propre.

2. Montrons tout d'abord que Γ_0 ne contient que des éléments hyperboliques. Si Γ_0 contient par l'absurde un élément γ elliptique, alors $\langle \gamma \rangle$ est compact dans Γ_0 discret, donc est fini, ce qui contredit l'absence de torsion de Γ_0 . Supposons maintenant que Γ_0 contient un élément γ parabolique. Puisque $\Gamma_0 < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ est sans torsion et cocompact, il agit librement proprement et cocompactement sur \mathbb{H}^2 (voir le lemme B.3 pour une preuve de ceci) par isométries, et définit donc une surface compacte hyperbolique $S := \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ au quotient. On sait que γ ne fixe aucun point de \mathbb{H}^2 (car il est parabolique), et fixe un unique point x_∞ du bord à l'infini. Donc pour tout $x \in \mathbb{H}^2$, un chemin allant de x à $\gamma \cdot x$ définit un lacet c au quotient, non homotopiquement trivial car son relevé serait sinon un lacet du revêtement \mathbb{H}^2 (or $x \neq \gamma \cdot x$). De plus, la distance $d_{\mathbb{H}^2}(x, \gamma \cdot x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers le point fixe x_∞ au bord. On peut donc finalement trouver une suite $(c_n)_n$ de lacets non homotopiquement triviaux sur la surface S , dont la longueur pour la métrique hyperbolique tend vers 0. Choisissons maintenant une suite de points $x_n \in c_n$ sur les lacets construits. Par compacité de S , on peut en extraire une suite $(x'_n)_n$ qui converge vers un point $p \in S$. On choisit un $\alpha > 0$ assez petit pour que la boule ouverte $U = B(p, \alpha) := \{x \in S \mid d_S(x, p) < \alpha\}$ soit un disque D^2 plongé dans S , et on pose $U' := B(p, \alpha/2)$. Alors, puisque $x'_n \rightarrow p$ et $\text{Long}(c'_n) \rightarrow 0$, à partir d'un certain rang, on a simultanément : $x'_n \in U'$ et $\text{Long}(c'_n) < \alpha/2$, ce qui impose finalement $c'_n \subset U \simeq D^2$. Donc les c'_n sont homotopiquement triviaux à partir d'un certain rang, ce qui contredit la construction faite. Donc tous les éléments de Γ_0 sont bien hyperboliques.

De plus, Γ_0 ne peut pas être contenu en entier dans un même sous-groupe à un paramètre hyperbolique, car ce dernier devrait alors être cocompact (puisque Γ_0 l'est), ce que la décomposition d'Isawawa interdit. On peut enfin préciser que pour tout sous-groupe à un paramètre hyperbolique H , $\Gamma_0 \cap H$ est un sous-groupe discret de $H \simeq \mathbb{R}$, donc est monogène.

Supposons par l'absurde que ρ est injective. Alors en notant $p_2: \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la seconde projection, $\Gamma_0 \simeq \Gamma$ est isomorphe à $p_2(\Gamma) < \mathbb{R}$, donc est abélien. On en déduit que $\overline{\Gamma_0}^\circ$, la composante neutre de l'adhérence de Zariski $\overline{\Gamma_0}$ de Γ_0 , est un sous-groupe fermé connexe abélien non discret de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, donc un sous-groupe à un paramètre de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ (car les seules sous-algèbres abéliennes de \mathfrak{sl}_2 sont les droites). Or $\overline{\Gamma_0}^\circ$ est d'indice fini dans $\overline{\Gamma_0}$ (car les groupes algébriques ont un nombre fini de composantes connexes), donc $\Gamma'_0 := \Gamma_0 \cap \overline{\Gamma_0}^\circ$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ_0 , donc est également cocompact dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ selon le lemme B.1. Le sous-groupe à un paramètre $\overline{\Gamma_0}^\circ$ est donc hyperbolique et agit cocompactement sur $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, ce qui contredit la décomposition d'Isawawa (on peut également utiliser le fait que Γ'_0 devrait alors être isomorphe à \mathbb{Z} , ce qui est impossible par un argument de dimension cohomologique, ou encore plus simplement car Γ'_0 est le groupe fondamental d'une surface hyperbolique de genre strictement supérieur à 1, et que le groupe fondamental d'une telle surface n'est pas isomorphe à \mathbb{Z}).

Nous montrons maintenant la troisième affirmation. Supposons par l'absurde qu'il existe $g_1 = (\gamma_1, u_1) \in \Gamma$, tel que :

$$l(\gamma_1) < |u_1| \quad (3.5.11)$$

(si on avait égalité $l(\gamma_1) = |u_1|$, la suite $(g_1^n)_n$ contredirait directement le premier critère de propriété prouvé précédemment). Alors selon la quatrième inégalité de la proposition 3.5.7, $t(\gamma_1) < |u_1|$. Or, puisque ρ n'est pas injective, il existe un élément de la forme $g_2 = (\gamma_2, 0)$ dans Γ . En particulier, γ_2 appartient à un autre groupe à un paramètre hyperbolique que γ_1 , donc en posant $\lambda := t(\gamma_2)/(|u_1| - t(\gamma_1)) > 0$, et quitte à conjuguer simultanément γ_1 et γ_2 (ce qui ne changera pas les propriétés de propriété auxquelles nous allons

nous intéresser) on peut appliquer l'estimation asymptotique (3.5.7) à la suite $(g_1^{\lambda n} g_2^n)_n$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} l(g_1^{\lambda n} g_2^n) - |u(g_1^{\lambda n} g_2^n)| &= \lambda n t(\gamma_1) + n t(\gamma_2) + O(1) - |\lambda n u_1| \\ &= \lambda n (t(\gamma_1) - |u_1|) + n t(\gamma_2) + O(1) \\ &= O(1). \end{aligned}$$

Donc la suite $(g_1^{\lambda n} g_2^n)_n$ contredit le critère de propreté démontré précédemment. L'inégalité (3.5.9) est donc bien vérifiée pour tout élément de Γ . \square

Nous montrons maintenant que l'on peut se ramener à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Nous utiliserons pour cela le résultat ci-dessous appelé « finitude du niveau », dont on peut trouver une démonstration complète dans la thèse de François Salein [Sal99, Théorème 3.3.2.3].

Théorème 3.5.9 (Finitude du niveau.). *Soit $\tilde{\Gamma}$ un sous-groupe discret de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, agissant proprement et cocompactement sur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$. Alors l'intersection $\tilde{\Gamma} \cap (Z \times \{0\})$ est non triviale.*

Rappelons que l'on note $\Gamma = \pi(\tilde{\Gamma})$ la projection de $\tilde{\Gamma}$ sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, et $\Gamma_0 = p_1(\Gamma_0)$ la projection de ce dernier sur le facteur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, avec $p_1: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ la projection canonique sur le premier facteur .

Proposition 3.5.10. 1. Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ qui agit proprement cocompactement sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

2. De plus Γ est le graphe d'une représentation $\rho: \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\rho \circ \pi = \tilde{\rho}$ (ce qui signifie que $\tilde{\rho}$ est nulle sur Z).

3. Enfin Γ_0 est un sous-groupe discret cocompact de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Démonstration. 1. Selon le théorème 3.5.9, en notant z_0 un générateur de Z , il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\tilde{\Gamma} \cap (Z \times \{0\})$ est le groupe engendré par $(z_0^{n_0}, 0)$. Soit $(\gamma_n)_n$ une suite de Γ qui converge vers $(id, 0)$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Puisque $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ est isomorphe au quotient de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ par $Z \times \{0\}$, la convergence de γ_n se traduit par l'existence d'une suite $\tilde{\gamma}_n$ de $\tilde{\Gamma}$ qui relève γ_n , et d'une suite z_n de Z , tel que $\tilde{\gamma}_n z_n$ converge vers $(id, 0)$. Il existe une suite r_n d'entiers à valeurs dans $\{0, \dots, n_0 - 1\}$ telle que $z_n = \tilde{z}_n z_0^{r_n}$, où $\tilde{z}_n \in \tilde{\Gamma} \cap (Z \times \{0\})$. Supposons par l'absurde que r_n n'est pas constante égale à 0 à partir d'un certain rang. On peut alors extraire une suite r_{k_n} constante égale à $0 < r < n_0$, de sorte que $\tilde{\gamma}_{k_n} \tilde{z}_{k_n}$ converge vers $(z_0^{-r}, 0)$. Puisque $\tilde{\Gamma}$ est discret donc fermé, on en déduit que $z_0^{-r} \in \tilde{\Gamma} \cap (Z \times \{0\}) = \langle z_0^{n_0} \rangle$, ce qui contredit l'inégalité $0 < r < n_0$. Donc r_n est constante égale à 0 à partir d'un certain rang. Ainsi $\tilde{\gamma}_n \tilde{z}_n$ est une suite convergente de $\tilde{\Gamma}$, donc constante à partir d'un certain rang puisque $\tilde{\Gamma}$ est discret, et par suite γ_n l'est également. La projection $\Gamma < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ est donc bien un sous-groupe discret.

On montre de la même façon que Γ agit proprement. Soit x_n une suite convergente de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, et γ_n une suite de Γ , tel que $\gamma_n \cdot x_n$ converge dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Il existe alors une suite $\tilde{\gamma}_n$ de $\tilde{\Gamma}$ au dessus de γ_n , une suite \tilde{z}_n de $\tilde{\Gamma} \cap (Z \times \{0\})$, une suite r_n d'entiers dans $\{0, \dots, n_0 - 1\}$, et une suite \tilde{x}_n au dessus de x_n , tel que $z_0^{r_n} \tilde{\gamma}_n \tilde{z}_n \cdot \tilde{x}_n$ converge dans $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$. Pour chaque valeur entière $0 < k < n_0$ prise une infinité de fois par la suite r_n , en notant $r_{\varphi_k(n)}$ la suite extraite de r_n correspondant à la valeur k , la suite $\tilde{\gamma}_{\varphi_k(n)} \tilde{z}_{\varphi_k(n)} \cdot \tilde{x}_{\varphi_k(n)}$ converge, et donc $\tilde{\gamma}_{\varphi_k(n)} \tilde{z}_{\varphi_k(n)}$ est relativement compacte par propreté de l'action de $\tilde{\Gamma}$. Or les suites extraites $(\tilde{\gamma}_{\varphi_k(n)} \tilde{z}_{\varphi_k(n)})_n$ forment une partition finie de $(\tilde{\gamma}_n \tilde{z}_n)_n$, donc on en déduit finalement que $(\tilde{\gamma}_n \tilde{z}_n)_n$ est relativement compacte, et donc que γ_n l'est également.

L'action est enfin cocompacte car π passe au quotient en une application surjective de $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ sur $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

2. Il suffit de montrer que la projection $p_1|_{\Gamma}: \Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est injective. Supposons par l'absurde qu'il existe $u \neq 0$ tel que $g = (id, \begin{bmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{bmatrix}) \in \Gamma$. Alors Γ_0 est relativement compact dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. En effet, s'il existe une suite $g_n = (\gamma_n, u_n)$ dans Γ telle que γ_n part à l'infini, alors il existe une suite k_n d'entiers telle que $|l(\gamma_n) - |k_n u + u_n|| = |l(g_n g^{k_n}) - |u(g_n g^{k_n})||$ soit bornée, ce qui contredit le critère de propreté 3.5.8 puisque γ_n part à l'infini. Mais si $\Gamma_0 = p_1(\Gamma)$ est relativement compact, alors puisque Γ agit proprement cocompactement, selon le lemme B.2, $p_2(\Gamma)$ est fermé dans $\mathbb{R} \simeq A$ et agit également proprement cocompactement sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Or le sous-groupe fermé $p_2(\Gamma)$ de $A \simeq \mathbb{R}$ est de dimension cohomologique égale à 1 (car $p_2(\Gamma) = A$ ou $p_2(\Gamma) \simeq \mathbb{Z}$), donc il ne peut pas agir proprement cocompactement sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ selon le lemme A.2. L'hypothèse initiale est donc absurde, ie la projection est injective, et $\tilde{\rho}$ passe bien au quotient en une représentation $\rho: \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}$.

3. Supposons par l'absurde que Γ_0 n'est pas discret.

Fait 1. Γ_0 n'est pas dense dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Démonstration. Puisque $[\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})] = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ (car on vérifie au niveau des algèbres de Lie l'égalité : $[\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2] = \mathfrak{sl}_2$), si par l'absurde Γ_0 est dense dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, alors $[\Gamma_0, \Gamma_0]$ l'est également. Or, puisque le facteur \mathbb{R} est abélien, les premiers groupes dérivés de Γ et de Γ_0 sont égaux : $[\Gamma_0, \Gamma_0] = [\Gamma, \Gamma]$, donc en particulier $[\Gamma_0, \Gamma_0]$ est discret puisque contenu dans Γ , ce qui contredit l'hypothèse initiale. Donc Γ_0 ne peut pas être dense dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. \square

Donc la composante neutre de l'adhérence de Γ_0 (pour la topologie du groupe de Lie $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$) est un sous-groupe fermé connexe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ de dimension 1 ou 2, et Γ_0 est contenu dans son normalisateur $Nor(\overline{\Gamma_0}^\circ)$. Puisque $Nor(\overline{\Gamma_0}^\circ)$ est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, on sait en particulier qu'il a un nombre fini de composantes connexes, et donc le sous-groupe $\Gamma'_0 := \Gamma_0 \cap Nor(\overline{\Gamma_0}^\circ)^\circ$ est d'indice fini dans Γ_0 (en particulier, il est donc également discret). À conjugaison près dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, on est dans l'un des deux cas suivants pour le sous-groupe fermé connexe $\overline{\Gamma_0}^\circ$:

1. $\overline{\Gamma_0}^\circ = \mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$;
2. $\overline{\Gamma_0}^\circ = A$ ou N ou AN , avec

$$AN = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ceci découle de la classification à action adjointe près des éléments de \mathfrak{sl}_2 , et du fait que $Lie(AN)$ est, à action adjointe près, la seule sous-algèbre de dimension 2 de \mathfrak{sl}_2 . Pour H un sous-groupe fermé connexe d'un groupe de Lie G , on a l'égalité :

$$Lie(Nor(H)) = Nor(Lie(H)),$$

de laquelle on déduit en calculant dans \mathfrak{sl}_2 les égalités suivantes : $Nor(\mathrm{PSO}(2, \mathbb{R}))^\circ = \mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$, $Nor(A)^\circ = A < AN$, et $Nor(N)^\circ = Nor(AN)^\circ = AN$. On a donc finalement la dichotomie suivante pour $\Gamma'_0 = \Gamma_0 \cap Nor(\overline{\Gamma_0}^\circ)^\circ$:

1. $\Gamma'_0 < \mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$;
2. ou $\Gamma'_0 < AN$.

Fait 2. Le premier cas est impossible.

Démonstration. Sinon, il y a un sous-groupe $\Gamma' = \Gamma \cap (\Gamma'_0 \times \mathbb{R})$ d'indice fini dans Γ donc cocompact, contenu dans $\mathrm{PSO}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Donc $\mathrm{PSO}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ est également cocompact dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, et puisque $\mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$ est compact, on en déduit selon le lemme B.2 que le facteur \mathbb{R} agit cocompactement, ce qui est absurde comme on l'a déjà vu plusieurs fois (par exemple, ceci contredit la décomposition d'Isawawa). \square

On est donc dans le second cas, dans lequel le sous-groupe connexe AN est une surface de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ préservée par l'action de $\Gamma' := \Gamma \cap (\Gamma'_0 \times \mathbb{R})$ qui agit librement proprement et cocompactement sur AN (car AN est fermée). De plus, selon le fait 3 ci-dessous, l'action de Γ' préserve un feuilletage de rang 1 sur AN .

Fait 3. Il existe sur AN un feuilletage de rang 1 invariant par l'action de $AN \times A$.

Démonstration. Considérons sur AN le champ de vecteurs invariant à gauche \tilde{H} défini par le vecteur

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in Lie(A) < Lie(AN).$$

Puisque le sous-groupe à un paramètre A est abélien, on a pour $a \in A$ l'égalité : $D_e R_a(H) = D_e L_a(H)$, d'où on déduit que \tilde{H} est également invariant par l'action à droite de A . Donc \tilde{H} définit le feuilletage cherché. \square

Le feuilletage décrit ci-dessus passe donc au quotient sur $\Gamma' \backslash AN$, qui est donc une surface compacte connexe qui supporte un feuilletage de rang 1. Une telle surface est de genre 1, donc $\Gamma' \backslash AN$ est topologiquement un tore ou une bouteille de Klein. Puisque le revêtement des orientations d'une bouteille de Klein est homéomorphe à un tore, son groupe fondamental contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}^2 = \pi_1(T^2)$. On en déduit finalement que quitte à prendre un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer Γ' , qui est isomorphe au groupe fondamental de la surface $\Gamma' \backslash AN$, isomorphe à \mathbb{Z}^2 , ainsi que sa projection $\Gamma'_0 \simeq \Gamma'$. En effet un sous-groupe d'indice fini de Γ' (respectivement Γ'_0) est encore discret (resp. non discret), et agit encore cocompactement sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, donc les propriétés que nous allons utiliser sont conservées en prenant un sous-groupe d'indice fini. Les résultats suivants vont nous permettre de conclure.

Fait 4. 1. Les seuls sous-groupes fermés connexes abéliens non discrets de AN sont les sous-groupes à un paramètre.

2. Soit H un sous-groupe à un paramètre non elliptique de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Alors l'action de $H \times \mathbb{R}$ sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ n'est pas propre.

Démonstration. 1. Car AN est de dimension 2 et est non abélien.

2. Il existe en effet une suite γ_k dans H partant à l'infini telle que $l(\gamma_k) \rightarrow \infty$, et alors la suite $(\gamma_k, l(\gamma_k)/2)$ contredit le premier critère de propriété du lemme 3.5.8. \square

L'intersection $\Gamma'_0 \cap (\overline{\Gamma'_0}^Z)^\circ$ de Γ'_0 avec la composante neutre de son adhérence de Zariski est un sous-groupe fermé connexe abélien non discret de AN d'indice fini dans Γ'_0 (car les sous-groupes algébriques ont un nombre fini de composantes connexes). Donc quitte à prendre des sous-groupes d'indices finis, on peut supposer selon la première assertion du fait 4 ci-dessus que Γ'_0 est contenu dans un sous-groupe à un paramètre de AN parabolique ou hyperbolique que l'on note U , et Γ' contenu dans $U \times \mathbb{R}$. De plus, Γ' est cocompact dans $U \times \mathbb{R}$. En effet, introduisons l'isomorphisme explicite $\exp \times id: (t, u) \mapsto (\exp(tX), u)$ de \mathbb{R}^2 sur $U \times \mathbb{R}$ (avec $X \in \mathfrak{sl}_2$ qui engendre U) et notons ϕ son inverse. En notant a, b deux générateurs de Γ' , l'isomorphisme ϕ envoie Γ' sur le sous-groupe $\mathbb{Z}\phi(a) + \mathbb{Z}\phi(b)$ de \mathbb{R}^2 , donc il suffit de montrer que $(\phi(a), \phi(b))$ est \mathbb{R} -libre pour montrer que Γ' est cocompact. Or, si par l'absurde $\phi(b)$ et $\phi(a)$ sont proportionnels, alors en notant $\phi(a) = (t_a, u_a)$, le morphisme $\rho|_{\Gamma'_0}$ est égal à la restriction du morphisme $\rho: \exp(\lambda X) \in H \rightarrow \lambda u_a/t_a \in \mathbb{R}$, (car cette égalité est vérifiée sur $p_1(a)$, et si $\phi(b) = \mu\phi(a) = (t_b, u_b)$, alors $\rho(p_1(b)) = u_b = \mu u_a = t_b u_a/t_a$), donc est continu en particulier. Cela implique que Γ'_0 est discret, car si une suite γ_n de Γ'_0 converge vers e , alors $(\gamma_n, \rho(\gamma_n))$ converge vers $(e, 0)$ dans Γ' , donc est stationnaire puisque Γ' est discret. Ceci contredit notre hypothèse initiale, donc finalement $(\phi(a), \phi(b))$ est \mathbb{R} -libre, et Γ' est bien cocompact dans $U \times \mathbb{R}$. Puisque Γ' agit proprement sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, on en déduit alors selon le lemme B.1 démontré en annexe que $U \times \mathbb{R}$ doit agir proprement sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, ce qui contredit le second résultat du fait 4. Notre hypothèse initiale est donc absurde, et Γ_0 est finalement bien un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Nous montrons maintenant que Γ_0 est cocompact. Selon le lemme de Selberg, il existe un sous-groupe $\Gamma'_0 < \Gamma_0$ d'indice fini sans torsion de Γ_0 (ce lemme s'applique car $\Gamma_0 < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est bien de type fini, puisqu'il est isomorphe à Γ , qui est le groupe fondamental de la variété compacte $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$), et il suffit donc selon le lemme B.1 de montrer que Γ'_0 est cocompact pour savoir que Γ_0 l'est. Puisque Γ'_0 est discret sans torsion, il agit librement et proprement sur \mathbb{H}^2 (voir B.3). Il agit par des isométries préservant l'orientation, donc définit finalement une surface hyperbolique $S = \Gamma'_0 \backslash \mathbb{H}^2$ orientable et connexe, dont le groupe fondamental est isomorphe à Γ'_0 . Supposons par l'absurde que Γ'_0 n'est pas cocompact. Alors S n'est pas compacte selon le lemme B.3. Or on sait que le groupe fondamental d'une surface hyperbolique non compacte est un groupe libre (cela est par exemple prouvé dans [Sti93, p.142]), et puisqu'un groupe libre est de dimension cohomologique égale à 1 (voir l'annexe A.2), et que Γ'_0 est d'indice fini dans Γ_0 , on a donc $\mathrm{cd} \Gamma_0 = \mathrm{cd} \Gamma'_0 = 1$ (voir l'annexe (A.4)). Puisque la projection $\tilde{\Gamma}_0 \rightarrow \Gamma_0$ est de noyau isomorphe à \mathbb{Z} selon le théorème 3.5.9 de finitude du niveau, on obtient finalement selon la propriété (A.5) l'inégalité suivante : $\mathrm{cd} \tilde{\Gamma} = \mathrm{cd} \tilde{\Gamma}_0 \leq \mathrm{cd} \mathbb{Z} + \mathrm{cd} \Gamma_0 = 2$. Mais cette inégalité contredit la propriété A.2 reliant la dimension cohomologique et les actions de groupes, selon laquelle $\mathrm{cd} \tilde{\Gamma} = 3$ puisque le groupe discret $\tilde{\Gamma}$ agit librement proprement et cocompactement sur la variété contractile $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$. Donc Γ'_0 est bien cocompact. Ceci termine la preuve des trois assertions de la proposition 3.5.10. \square

Nous montrons maintenant la propriété au niveau de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ pour les groupes-graphes $\Gamma_s := gr(\Gamma_0, \rho_s)$, où l'on note $\rho_s = s\rho: \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 3.5.11. *Pour tout s , Γ_s agit proprement sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.*

Démonstration. On note Γ'_0 un sous-groupe d'indice fini sans torsion de Γ_0 , fourni par le lemme de Selberg. Pour $s \in]0; 1]$, $\Gamma'_s := gr(\Gamma'_0, \rho|_{\Gamma'_0})$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ_s , donc selon le lemme B.1 démontré en annexe, il suffit de prouver que l'action sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ de Γ'_s est propre pour savoir que celle de Γ_s l'est. Soit $\gamma_k = (g_k, s\rho(g_k))$ une suite dans Γ_s partant à l'infini. Selon le lemme 3.5.8, puisque l'action de $\Gamma' = gr(\Gamma'_0, \rho|_{\Gamma'_0})$ est propre et que Γ'_0 est sans torsion, $l(\gamma_k) = l(g_k) > |u(g_k)| = |\rho(g_k)| > s|\rho(g_k)| = |u(\gamma_k)|$, et donc : $l(\gamma_k) - |u(\gamma_k)| = l(g_k) - s|\rho(g_k)| > l(g_k) - |\rho(g_k)| \rightarrow +\infty$ selon le lemme 3.5.8. Donc l'action de Γ'_s est bien propre selon le lemme 3.5.8 de nouveau, ce qui termine la preuve de la proposition 3.5.11. \square

Il ne reste plus, pour terminer la preuve du théorème 3.5.3, qu'à nous ramener à $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$.

Fin de la démonstration du théorème 3.5.3. Tout d'abord, $\tilde{\Gamma}_0$ est contenu dans $\pi^{-1}(\Gamma_0)$, qui est discret car Γ_0 est discret et les fibres de la projection π sont également discrètes; ainsi $\tilde{\Gamma}_0$ est bien un sous-groupe discret de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$.

De plus, puisque $\tilde{\rho}$ est nulle sur $\tilde{\Gamma}_0 \cap Z$ selon la proposition 3.5.10, $\tilde{\Gamma} \cap (Z \times \{0\}) = \tilde{\Gamma}_0 \cap Z$, qui est non

trivial selon la finitude du niveau 3.5.9, donc la fibre de la projection $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma_0 \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, égale à $Z/\tilde{\Gamma}_0 \cap Z$ est finie, et puisque Γ_0 est cocompact selon la proposition 3.5.11, $\tilde{\Gamma}_0$ est également cocompact. Nous montrons maintenant que pour $s \in [0; 1]$, le groupe $\tilde{\Gamma}_s$ agit bien proprement et librement sur $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$. Soit \tilde{x}_n une suite convergente de $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$, et $\tilde{\gamma}_n$ une suite de $\tilde{\Gamma}_0$ telle que $y_n := (\tilde{\gamma}_n, \tilde{\rho}_s(\tilde{\gamma}_n)) \cdot \tilde{x}_n$ converge. Alors par propriété de l'action de $\tilde{\Gamma}_s$ sur $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, on sait que $(\pi(\tilde{\gamma}_n), \pi(\tilde{\rho}_s(\tilde{\gamma}_n)))$ est relativement compacte, or $\pi(\tilde{\rho}_s(\tilde{\gamma}_n)) = \tilde{\rho}_s(\tilde{\gamma}_n)$, donc finalement puisque $\tilde{\gamma}_n \tilde{x}_n a^{\tilde{\rho}_s(\tilde{\gamma}_n)}$ est relativement compacte, et \tilde{x}_n également, on en déduit que $\tilde{\gamma}_n$ est également relativement compacte. Donc l'action de $\tilde{\Gamma}_s$ sur $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ est propre. En particulier les stabilisateurs des points de l'action de $\tilde{\Gamma}_s$ sont compacts dans des groupes discrets, donc finis. S'ils étaient non triviaux, $\tilde{\Gamma}_s$ aurait une torsion non triviale, mais cela est impossible car $\tilde{\Gamma}_s$ est isomorphe à $\tilde{\Gamma}$ qui est contenu dans $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$, or $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ n'a pas de torsion. Donc $\tilde{\Gamma}_s$ agit également librement. Nous pouvons maintenant appliquer l'idée exposée au début de ce paragraphe. L'action

$$\gamma \cdot (g, s) := ((\gamma, \tilde{\rho}_s(\gamma)) \cdot g, s)$$

de $\tilde{\Gamma}_0$ sur $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R}) \times [0; 1]$ est libre par liberté de l'action des $\tilde{\Gamma}_s$, vérifions maintenant qu'elle est bien propre. Pour $\gamma \in \tilde{\Gamma}_0$ et $s \in [0; 1]$, on note $\gamma^s := (\gamma, \tilde{\rho}_s(\gamma)) \in \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Soit K un ouvert relativement compact de $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$. Pour tout $t \in [0; 1]$, par propriété de l'action du groupe discret $\tilde{\Gamma}_t$, l'ensemble $K_t := \{\gamma \in \tilde{\Gamma}_0 \mid \gamma^t \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. Par continuité du chemin de représentations $(\tilde{\rho}_s)_s$, et puisque K est ouvert, il existe $\alpha_t > 0$ tel que pour tout $s \in]t - \alpha_t; t + \alpha_t[$, on ait l'égalité : $K_t = K_s$. Par compacité, il existe un nombre fini t_0, \dots, t_d de points de l'intervalle $[0; 1]$ tels que l'ensemble des intervalles $]t_i - \alpha_{t_i}; t_i + \alpha_{t_i}[$ recouvrent $[0; 1]$. Donc l'ensemble $\{\gamma \in \tilde{\Gamma}_0 \mid \gamma \cdot K \times [0; 1] \cap K \times [0; 1] \neq \emptyset\} = \cup_{t \in [0; 1]} \{\gamma \in \tilde{\Gamma}_0 \mid \gamma^t \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini, car contenu dans $\cup_{i=0}^d \{\gamma \in \tilde{\Gamma}_0 \mid \gamma^{t_i} \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$, union finie d'ensembles finis. Ceci montre la propriété de l'action de $\tilde{\Gamma}_0$. Puisque cette action préserve les fibres de la projection canonique $p: \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R}) \times [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, celle-ci passe au quotient sur $P = \tilde{\Gamma}_0 \backslash (\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R}) \times [0; 1])$ en une projection que nous noterons encore p , qui fait de P un fibré au dessus de $[0; 1]$, la fibre de s étant $\tilde{\Gamma}_s \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$.

On considère maintenant une métrique riemannienne quelconque sur P , et en notant $\text{grad } p$ le gradient de la projection p pour cette métrique, on définit le champ de vecteurs $X = \text{grad } p / \|\text{grad } p\|^2$, normalisé du gradient de p . Celui-ci vérifie la relation : $Dp(X) = \frac{\partial}{\partial s}$, donc en notant $(\phi^t)_t$ son flot local, pour tout s , ϕ^t induit pour tout t petit un difféomorphisme entre les fibres $\tilde{\Gamma}_s \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ et $\tilde{\Gamma}_{s+t} \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$. Par compacité de $[0; 1]$, on en déduit en itérant en nombre fini de fois le flot ϕ^t , un difféomorphisme de $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ sur $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$. En particulier $\tilde{\Gamma}_0$ est cocompact. \square

Il reste, pour terminer la preuve du théorème 2.2.21 tel que nous l'avons annoncé, à comprendre que l'on peut plus précisément choisir un difféomorphisme de $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ sur $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ qui soit une équivalence orbitale (voir 2.1.2 pour plus de précision sur cette notion), c'est à dire qui envoie les orbites du flot Anosov sur celles du flot hyperbolique standard de l'espace homogène $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$. Ceci est montré dans [Ghy87, Théorème 6.5], grâce à un résultat dû à Haefliger et exposé dans [Hae82], selon lequel il suffit pour classifier certains flots à équivalence orbitale près, de classifier les *groupoïdes d'holonomie transverse* des feuilletages définis par ces flots. Nous allons nous contenter ici d'un cas particulier de ce résultat, énoncé et démontré de façon très naturelle dans la thèse de Thierry Barbot [Bar92]. Ceci nous évite d'avoir à introduire la notion générale de groupoïde d'holonomie transverse, et nous permet de nous contenter de notions plus classiques.

Soit (φ^t) un flot sur une variété M . Il se relève en un flot $\tilde{\varphi}^t$ sur son revêtement universel \tilde{M} , qui commute avec l'action du groupe fondamental $\pi_1(M)$ sur \tilde{M} . On appelle *espace des orbites* l'espace topologique quotient de \tilde{M} par la relation d'équivalence dont les classes sont les orbites du flot $\tilde{\varphi}^t$. On note Q^φ l'espace des orbites, et $\pi^\varphi: \tilde{M} \rightarrow Q^\varphi$ la projection canonique associée à ce quotient. Le résultat ci-dessous répond aux questions habituelles sur les quotients : dans le cadre qui est le nôtre, l'espace des orbites est particulièrement agréable (voir [Bar92, Théorème 1.5.2], il est même prouvé par des arguments de topologie algébrique que l'espace des orbites est difféomorphe à \mathbb{R}^{n-1} si la variété est de dimension n). On rappelle qu'un flot d'Anosov est de codimension 1 si l'un des deux fibrés stable ou instable est de dimension 1, donc tout flot en dimension 3 est de codimension 1.

Théorème 3.5.12. *Soit φ^t un flot d'Anosov de codimension 1 sur une variété M . Alors l'espace des orbites a une structure de variété, pour laquelle la projection $\pi^\varphi: \tilde{M} \rightarrow Q^\varphi$ est un fibré.*

Puisque le relevé $\tilde{\varphi}^t$ du flot commute avec l'action du groupe fondamental, cette action passe au quotient sur l'espace des orbites en une action telle que la projection π^φ est $\pi_1(M)$ -équivariante. Nous pouvons maintenant énoncer l'argument de la théorie de Haefliger tel qu'il est prouvé dans [Bar92, Théorème 1.5.4].

Théorème 3.5.13. *Soit (M, φ^t) et (N, ψ^t) deux flots d’Anosov de codimension 1. Ils sont orbite-équivalents, ou l’un est orbite-équivalent à l’inverse de l’autre, si et seulement si il existe un difféomorphisme entre leurs espaces d’orbites qui soit équivariant pour l’action des groupes fondamentaux.*

La régularité de l’espace des orbites et de la projection associée fournis par le théorème 3.5.12 sont implicitement utilisés dans la preuve faite dans [Bar92, Théorème 1.5.4] du théorème 3.5.13, c’est ici que l’hypothèse supplémentaire de codimension 1 des flots est utilisée, ce qui permet de simplifier l’argument. Ceci étant, comme cela est expliqué dans le même texte au théorème 1.5.1, ce résultat se généralise dans le cadre de flots Anosov quelconques, mais il faut alors utiliser la notion plus générale de groupoïde d’holonomie transverse des feuilletages.

Nous pouvons maintenant conclure grâce au théorème 3.5.13.

Fin de la démonstration du théorème 2.2.21. Les espaces d’orbites du flot Anosov (φ^t) sur $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R}) = M$ et du flot hyperbolique $(a^{\lambda t}), \lambda \in \mathbb{R}^*$ sur $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ s’identifient tous deux au quotient $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})/A$. Pour ce qui est de l’action des groupes fondamentaux, on peut identifier $\pi_1(M)$ à $\tilde{\Gamma} = gr(\tilde{\Gamma}_0, \tilde{\rho})$, et le facteur de droite agit alors trivialement sur Q^φ (car pour $\gamma \in \tilde{\Gamma}_0$, $\tilde{\rho}(\gamma)$ agit sur M par translation à droite par $a^{\tilde{\rho}(\gamma)}$), et le facteur de gauche agit par translations à gauche sur $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})/A$, de sorte que l’identification entre les espaces d’orbites Q^φ et Q^a est finalement équivariante pour la projection $p_1: \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Gamma}_0$ sur le premier facteur. On peut alors appliquer le théorème 3.5.13 pour en déduire qu’il existe entre M et $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ un difféomorphisme envoyant orbites sur orbites (et inversant éventuellement l’orientation). \square

Nous nous devons enfin une remarque au sujet de la preuve du théorème 2.2.21 pour être tout à fait honnête : si l’on sait que $\tilde{\Gamma}_0$ est discret cocompact, le théorème 3.5.13 et la fin de la démonstration que nous venons de faire montre directement que M est difféomorphe à l’espace homogène $\tilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$, ce qui nous évite de le montrer « à la main » comme nous l’avons fait plus haut dans la preuve du théorème 3.5.3 en utilisant un champ de vecteurs. Cependant on a vu que cette étape finale est la plus facile, et que l’essentiel du travail est justement de montrer que $\tilde{\Gamma}_0$ est discret cocompact.

3.6 Existence de flots non hyperboliques

Le théorème 3.5.1 affirme que les flots Anosov de contact sur une variété M sont représentés par les couples $(\tilde{\Gamma}_0, \rho)$, où $\tilde{\Gamma}_0$ est un sous-groupe discret cocompact de $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$, et $\rho: \tilde{\Gamma}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme (on dit aussi une *représentation* de $\tilde{\Gamma}_0$, implicitement dans A identifié à \mathbb{R} dans notre cas) tel que :

- ρ est *admissible*¹⁷, ie le graphe $\tilde{\Gamma} = gr(\tilde{\Gamma}_0, \rho)$ agit proprement sur $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$,
- le flot hyperbolique standard est Anosov sur le quotient $\tilde{\Gamma} \backslash \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$.

En effet si $\tilde{\Gamma} = gr(\tilde{\Gamma}_0, \rho)$ agit proprement sur $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$, alors selon la proposition 3.5.10 et le lemme 3.5.8, $\tilde{\Gamma}_0$ ne contient que des éléments hyperboliques et donc $\tilde{\Gamma}$ agit librement sur $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$. Et pour le second point, un flot hyperbolique $(a^{\lambda t}), \lambda \in \mathbb{R}^*$ est Anosov au quotient si et seulement si le flot hyperbolique standard (a^t) l’est.

Les flots hyperboliques standards sur les quotients de $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ vus au paragraphe 2.2.1 correspondent aux cas particuliers où l’holonomie de la $(\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R}))$ -structure est triviale sur le second facteur, et réciproquement tous les flots Anosov de contacts correspondent à des déformations des holonomies $h: \pi_1(M) \rightarrow \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ de ces premiers exemples en des morphismes $h' = (h, \rho \circ h): \pi_1(M) \rightarrow \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ non triviaux sur le facteur de droite. On peut cependant se demander si de telles déformations non triviales, ie des représentations ρ non triviales vérifiant les deux conditions ci-dessus, existent bel et bien, ce qui revient à se demander s’il existe finalement de nouveaux flots Anosov de contacts en dimension trois, non conjugués aux flots hyperboliques sur les quotients de $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$. On peut ensuite chercher à classifier plus précisément les représentations vérifiant ces deux conditions.

Pour commencer, on sait qu’il existe bien des sous-groupes discrets cocompacts $\tilde{\Gamma}$ de $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ (par exemple grâce au théorème du polygone de Poincaré). Ensuite, nous avons vu au cours du paragraphe précédent une première condition suffisante à l’admissibilité d’une représentation ρ (voir 3.5.8), mais il n’est pas clair a priori qu’un sous-groupe discret cocompact de $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ dispose d’une représentation vérifiant cette condition. Salein étudie en détail dans [Sal99, Chapitre 4] les représentations admissibles de sous-groupes discrets cocompacts de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Pour ce qui nous intéresse, le théorème [Sal99, Théorème 4.1.1.1] répond entièrement à la question et classe de telles représentations à valeur dans un sous-groupe à un paramètre

17. On emploie ici la terminologie adoptée dans [Sal99, Chapitre 4], dans le cas des quotients de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

hyperbolique, et on peut à partir de là se ramener, comme on l'a fait au cours du paragraphe précédent, au problème des représentations admissibles d'un sous-groupe discret cocompact de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$. Cependant, une représentation admissible ne vérifie pas forcément la seconde condition, ie le flot hyperbolique standard sur le quotient $gr(\widetilde{\Gamma}_0, \rho) \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ n'est pas forcément Anosov (et les conditions à ajouter sur une représentation admissible pour que le flot hyperbolique standard soit Anosov au quotient ne sont pas claires).

Nous nous contenterons de l'existence d'une seule représentation non triviale, ce qui revient à vérifier que l'ensemble des représentations admissibles est ouvert, puisque la représentation triviale $\rho = 0$ l'est (nous précisons que c'est en particulier une conséquence du théorème 4.1 de [Sal99]). Ceci utilise d'une façon ou d'une autre le principe d'Ehresman-Thurston de déformation des (G, X) -structures. Nous l'énonçons ci-dessous sous une forme peu précise, et nous renvoyons à [Gol88, Theorem 3.1 p.12] pour une preuve complète et un énoncé plus détaillé. On définit une topologie sur les (G, X) -structures sur une variété compacte M en disant que deux d'entre elles sont proches si les cartes de leurs (G, X) -atlas sur un recouvrement commun (qui existe toujours) sont proches dans la topologie C^∞ .

Théorème 3.6.1 (Principe d'Ehresman-Thurston). *Soit M une variété compacte, supportant une (G, X) -structure d'holonomie $h: \pi_1(M) \rightarrow G$. Pour tout morphisme $h': \pi_1(M) \rightarrow G$ suffisamment proche de h pour la topologie de la convergence ponctuelle, il existe une (G, X) -structure sur M d'holonomie h' et qui soit proche de la (G, X) -structure initiale.*

Nous pouvons alors répondre à la question que nous nous sommes posé.

Proposition 3.6.2. *Il existe des flots Anosov de contact en dimension trois non C^0 -conjugués à un flot hyperbolique (a^t) sur un quotient $\widetilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ (plus précisément, il existe un ouvert de champs de vecteurs définissant de tels flots).*

Démonstration. Si $\widetilde{\Gamma}_0$ est un sous-groupe discret cocompact de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, $M = \widetilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ le quotient associé, et si on note (φ^t) le flot induit sur M par un flot hyperbolique $(a^{\lambda t})$, le théorème 3.6.1 affirme qu'il existe un morphisme $\rho: \widetilde{\Gamma}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ non trivial tel qu'il existe sur M une $(\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}))$ -structure de morphisme d'holonomie (id, ρ) , aussi proche que l'on veut de la $(\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}))$ -structure initiale. Donc le flot ψ^t sur M associé au flot $(0, \lambda t)_t$ défini par cette nouvelle structure peut être rendu aussi proche que l'on veut de φ^t , et par stabilité structurelle des flots Anosov (voir 2.1.5), on peut donc supposer que $(\psi^t)_t$ est encore un flot Anosov. Selon le théorème que nous venons de prouver, on sait que ce nouveau flot est bien orbite-équivalent au flot hyperbolique standard sur $\widetilde{\Gamma}_0 \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$, mais selon la remarque 3.5.2, puisque les $(\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}))$ -structures associées à φ^t et ψ^t ont des holonomies non conjuguées (car l'holonomie du second flot est non nulle sur le facteur \mathbb{R}), ces flots sont non conjugués. Ceci termine la preuve de la proposition. \square

Quelques directions de recherche

On peut espérer que la preuve présentée ici de la classification des flots Anosov de contact puisse se généraliser si le flot n'est plus nécessairement Anosov sur toute la variété, ou dans certains cas pour un difféomorphisme Anosov. Comme nous l'avons brièvement évoqué dans la section 3.6, on pourrait également chercher à préciser notre connaissance de la classification en décrivant, parmi les représentations $\rho: \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}$ d'un sous-groupe discret cocompact de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ dont le graphe agit proprement sur $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$, celles telles que le flot hyperbolique standard est Anosov au quotient.

Notations

Dans tout ce mémoire, nous nous plaçons si cela n'est pas précisé dans la catégorie lisse : les variétés, applications, tenseurs considérés, sont supposés lisses à priori. De plus, si cela n'est pas précisé, toutes les variétés considérées (en particulier, tous les groupes de Lie) sont supposées de dimension finie.

On note de façon générale e l'élément neutre d'un groupe abstrait, ou parfois id pour les groupes de matrices. Si G est un groupe et $g \in G$, nous noterons $R_g : x \mapsto xg$ (respectivement $L_g : x \mapsto gx$, respectivement $\Gamma_g : x \mapsto gxg^{-1}$) la translation à droite par g (resp. à gauche, resp. la conjugaison par g) sur le groupe G . En particulier, si G est un groupe de Lie, c'est un difféomorphisme de G . Dans ce cadre, si X est un élément de l'algèbre de Lie de G , on notera \tilde{X} le champ invariant à gauche défini par X , et on identifiera parfois le sous-groupe à un paramètre de G engendré par $X : (exp(tX))_{t \in \mathbb{R}}$, et le flot de difféomorphismes de G associé à $\tilde{X} : (R_{exp(tX)})_{t \in \mathbb{R}}$.

On note G° la composante neutre d'un groupe de Lie G , $Lie(G)$ ou \mathfrak{g} son algèbre de Lie, exp son application exponentielle, et Ad (respectivement ad) la représentation adjointe de G (respectivement celle de \mathfrak{g}).

Pour H un sous-groupe (respectivement \mathfrak{h} une sous-algèbre) de G (resp. de \mathfrak{g}), on note $Nor_G(H)$ (resp. $Nor_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$) ou simplement $Nor(H)$ (resp. $Nor(\mathfrak{h})$) le normalisateur de H dans G .

On note $\chi(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété M .

On note $\varphi^*\omega$ (respectivement $\varphi_*\omega$) le tiré en arrière (resp. poussé en avant) d'un tenseur ω quelconque par un difféomorphisme local (resp. par un difféomorphisme) défini par $\varphi : \varphi^*\omega(x) = D_x\varphi^*\omega_{\varphi(x)} = \omega_{\varphi(x)} \circ D_x\varphi$ (resp. par $\varphi_*\omega = (\varphi^{-1})^*\omega$), et on s'autorise même à pousser en avant par les difféomorphismes locaux lorsque cela fait sens, ie lorsque pour tout $q \in \varphi^{-1}(p)$, les tenseurs $D_q\varphi_*\omega_q$ sur l'espace tangent à p sont tous égaux.

Nous noterons toujours (e_1, \dots, e_n) la base canonique de l'espace euclidien \mathbb{R}^n .

A Résultats utilisés de dimension cohomologique

Nous utilisons au cours de la preuve du théorème 2.2.21 la notion de dimension cohomologique, et nous exposons maintenant les résultats utilisés à ce sujet. Nous renvoyons les lecteurs-trices désireux d'en savoir plus ou intéressés par la preuve de ces résultats au livre [Bro82], qui est une introduction à la théorie de la cohomologie des groupes dans son ensemble.

Schématiquement, la théorie de la cohomologie des groupes associe à un groupe Γ un complexe de chaînes (par une méthode catégorique ou topologique) qui ne dépend *que* du groupe abstrait Γ , puis considère la cohomologie de ce complexe. La dimension cohomologique de Γ est la plus grande dimension pour laquelle cette cohomologie est non nulle (voir [Bro82, p.185]), et est notée $\text{cd } \Gamma$ (elle est éventuellement infinie). Ce qui nous intéresse plus directement est la *dimension géométrique* de Γ (voir [Bro82, p.185]) notée $\text{geomdim } \Gamma$, et définie comme la plus petite dimension d'un $K(\Gamma, 1)$ -CW-complexe, c'est à dire d'un CW-complexe connexe et *asphérique* (ie dont le revêtement universel est contractile, ou de façon équivalente par le théorème de Whitehead, dont tous les groupes d'homotopie de degrés différents de 1 sont triviaux) de groupe fondamental isomorphe à Γ . Ce second invariant fait en effet le lien entre le groupe abstrait Γ , et son action sur les espaces topologiques comme groupe discret : il y a des conditions sur ces actions, qui ne dépendent que du groupe abstrait Γ . Le fait est que la dimension cohomologique et la dimension géométrique sont reliées par l'inégalité suivante (voir [Bro82, p.185]) :

$$\text{cd } \Gamma \leq \text{geomdim } \Gamma.$$

Puisqu'une variété est en particulier un CW-complexe, on peut prouver le résultat suivant, démontré par exemple dans [Bro82, Prop. 8.1 p.210].

Proposition A.1. — *S'il existe une variété asphérique M (éventuellement à bord) de groupe fondamental isomorphe à Γ , alors :*

$$\text{cd } \Gamma \leq \dim M, \tag{A.1}$$

avec égalité si, et seulement si M est compacte sans bord.

— *Si le groupe discret Γ agit proprement et librement sur une variété contractile M , alors :*

$$\text{cd } \Gamma \leq \dim M, \tag{A.2}$$

avec égalité si, et seulement si le quotient $\Gamma \backslash M$ est compact.

On déduit par exemple du dernier résultat ci-dessus que :

$$\text{cd } \mathbb{Z}^n = n, \tag{A.3}$$

en faisant agir \mathbb{Z}^n sur \mathbb{R}^n . Nous listons désormais les propriétés de la dimension cohomologique que nous utiliserons. Les deux premières sont prouvées dans [Bro82, Prop. 2.4 p.187], la troisième dans [Bro82, Cor. 2.5 p.187], et la dernière se déduit de la propriété (A.1) sachant que le bouquet de n cercles a pour groupe fondamental le groupe libre à n générateurs, et est compact.

Proposition A.2. — *Si Γ' est un sous-groupe de Γ , alors :*

$$\text{cd } \Gamma' \leq \text{cd } \Gamma, \tag{A.4}$$

avec égalité si : $\text{cd } \Gamma < \infty$, et Γ' est d'indice fini dans Γ .

— *Si*

$$1 \rightarrow \Gamma' \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma'' \rightarrow 1$$

est une suite exacte courte de groupes, alors on a :

$$\text{cd } \Gamma \leq \text{cd } \Gamma' + \text{cd } \Gamma''. \tag{A.5}$$

— *Un groupe ayant une torsion non triviale est de dimension cohomologique infinie.*

— *Un groupe libre a pour dimension cohomologique 1.*

B Autres résultats

Nous énonçons ici quelques résultats classiques utilisés plusieurs fois au cours de la preuve.

Lemme B.1. *Soit G un groupe de Lie (éventuellement discret) agissant sur une variété M , et H un sous-groupe fermé cocompact de G . Alors l'action de G sur M est propre (respectivement cocompacte) si, et seulement si, l'action de H sur M est propre (resp. cocompacte).*

Démonstration. Il est clair que si G agit proprement, alors H agit proprement ; et si de plus G agit compactement, alors $H \backslash M$ est l'espace total du fibré $H \backslash M \rightarrow G \backslash M$ dont la base et la fibre G/H sont compactes, donc H est également cocompact.

Supposons l'action de H propre. Soit $(x_n)_n$ une suite convergente de M , et $(g_n)_n$ une suite de G sortant de tout compact, on notera : $g_n \rightarrow \infty$. Par cocompacité de H dans G , il existe une suite $(h_n)_n$ de H telle que $k_n := g_n h_n$ est à valeur dans un compact, et puisque $g_n \rightarrow \infty$, cela impose en particulier que $h_n^{-1} \rightarrow \infty$. Par propriété de l'action de H sur M , on a alors : $h_n^{-1} \cdot x_n \rightarrow \infty$, d'où puisque k_n est relativement compacte : $g_n \cdot x_n = k_n \cdot (h_n^{-1} \cdot x_n) \rightarrow \infty$. Donc l'action de G est propre. Si l'action de H est cocompacte, il est clair que G est cocompact. \square

Lemme B.2. *Soit G_1, G_2 deux groupes de Lie agissant à gauche et à droite respectivement sur une variété M , et dont les actions commutent, de sorte que l'on peut définir une action à gauche du produit $G_1 \times G_2$ par : $(g_1, g_2) \cdot x = g_1 \cdot x \cdot g_2^{-1}$, et soit H un sous-groupe fermé du produit $G_1 \times G_2$. Si l'action de H sur M est propre (respectivement cocompacte), et si la projection $\pi_1(H)$ sur G_1 est relativement compacte, alors $\pi_2(H)$ est fermé dans G_2 et l'action de $\pi_2(H)$ sur M est également propre (resp. cocompacte).*

Démonstration. Soit g_n^2 une suite de $\pi_2(H)$ convergeant vers $g_\infty^2 \in G_2$, et soit $g_n^1 \in G_1$ telle que $h_n := (g_n^1, g_n^2) \in H$. Par relative compacité de $\pi_1(H)$, il existe une sous-suite $g_{k_n}^1$ convergeant vers g_∞^1 dans G_1 , et alors la suite h_{k_n} d'éléments de H converge vers (g_∞^1, g_∞^2) , donc puisque H est fermé, $g_\infty^2 \in \pi_2(H)$. Ceci montre que $\pi_2(H)$ est fermé.

Soit maintenant g_n^2 une suite de $\pi_2(H)$ partant à l'infini, g_n^1 une suite de G_1 telle que $(g_n^1, g_n^2) \in H$, et x_n une suite convergente de M . Par propriété de l'action de H , $y_n := g_n^1 \cdot x_n \cdot g_n^2$ part à l'infini, et par relative compacité de $\pi_1(H)$, $x_n \cdot g_n^2 = g_n^1^{-1} \cdot y_n$ part donc également à l'infini. Donc $\pi_2(H)$ agit bien proprement. Considérons l'action de $\pi_1(H)$ sur $M/\pi_2(H)$. La projection $H \backslash M \rightarrow \pi_1(H) \backslash M/\pi_2(H)$ est bien définie, et puisque H est cocompact, on en déduit donc que $\pi_1(H) \backslash M/\pi_2(H)$ est compact. Le quotient $M/\pi_2(H)$ est donc bien compact, comme espace total du fibré $M/\pi_2(H) \rightarrow \pi_1(H) \backslash M/\pi_2(H)$, dont la base, et la fibre $\pi_1(H)$, sont compacts. \square

Lemme B.3. *Soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Alors Γ agit librement proprement sur \mathbb{H}^2 . De plus Γ est cocompact si et seulement si le quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ est compact.*

Démonstration. Le stabilisateur d'un point de \mathbb{H}^2 dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ est en effet compact (car c'est une variété riemannienne), donc puisque Γ est discret donc fermé, son stabilisateur dans Γ est également compact, donc fini car Γ est discret, donc doit être trivial puisque Γ'_0 est sans torsion. Ainsi l'action de Γ est bien libre. Or \mathbb{H}^2 est un espace homogène $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/K$, avec $K = \mathrm{PSO}(2, \mathbb{R})$ compact le stabilisateur de i , donc puisque l'action de Γ est propre sur l'espace total du fibré $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/K$ dont la fibre est compacte, elle l'est également sur la base \mathbb{H}^2 , et l'action sur la base est cocompacte si et seulement si elle l'est sur l'espace total. \square

Références

- [Ano69] Dimitrii Viktorovich Anosov. *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*. American Mathematical Society, Providence, R.I, Etats-Unis d'Amérique, 1969.
- [Bar92] Thierry Barbot. *Géométrie transverse des flots d'Anosov*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon, France, 1992.
- [Bro82] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*. New York, Etats-Unis d'Amérique, 1982.
- [ČapS09] Andreas Čap and Jan Slovák. *Parabolic geometries. 1, Background and general theory*. American Mathematical Society, Providence (R.I.), Etats-Unis d'Amérique, 2009.
- [CLN85] Cesar Camacho and Alcides Lins Neto. *Geometric Theory of Foliations*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1985.
- [DK16] Boris Doubrov and Boris Komrakov. The geometry of second-order ordinary differential equations. *arXiv preprint :1602.00913*, 2016.
- [Fra70] John Franks. Anosov diffeomorphisms. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 14 :61–93, 1970.
- [Gei08] Hansjörg Geiges. *An introduction to contact topology*. Cambridge university press, 2008.
- [GHL04] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [Ghy87] Étienne Ghys. Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 20(2) :251–270, 1987.
- [Gol88] William M. Goldman. Geometric structures and varieties of representations. In *Geometry of Group Representations : Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference*, volume 74, page 169. American Mathematical Soc., 1988.
- [Hae82] André Haefliger. Groupoïdes d'holonomie et classifiants. In *Structure transverse des feuilletages*, volume 116, pages 70–97. Astérisque, 1982.
- [KHM95] Anatole Katok, Boris Hasselblatt, and Leonardo Mendoza. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge university press, 1995.
- [Lee12] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, 2012.
- [Mic08] Peter W. Michor. *Topics in differential geometry*, volume 93. American Mathematical Soc., 2008.
- [New70] S. E. Newhouse. On Codimension One Anosov Diffeomorphisms. *American Journal of Mathematics*, 92(3) :761–770, 1970.
- [Olv95] Peter John Olver. *Equivalence, invariants, and symmetry*. 1995.
- [Pla72] Joseph F. Plante. Anosov flows. *American Journal of Mathematics*, 94 :729–754, 1972.
- [PS70] Charles Pugh and Michael Shub. The ω -stability theorem for flows. *Inventiones mathematicae*, 11(2) :150–158, June 1970.
- [Sal99] François Salein. *Variétés anti-de Sitter de dimension 3*. Thèse de doctorat, École normale supérieure, Lyon, France, 1999.
- [Sam86] Pierre Samuel. *Géométrie projective*. Presses universitaires de France, Paris, France, 1986.
- [SC97] Richard W. Sharpe and Shiing-Shen Chern. *Differential geometry : Cartan's generalization of Klein's Erlangen program*. Springer, New York, Etats-Unis d'Amérique, 1997.
- [Sti93] John Stillwell. *Classical topology and combinatorial group theory*. Springer-Verlag, New York, Etats-Unis d'Amérique, 1993.
- [Thu97] William Paul Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*. Princeton university press, 1997, Princeton (N.J.), Etats-Unis d'Amérique, 1997.